2025-7-A1

SENER Aeroespazialak antolatutako ate irekien jardunaldi baten barruan, etorkizuneko fisikari eta ingeniarien belaunaldiak inspiratzeko, benetako proiektu batean parte hartzeko aukera izan duzu. SENER, Eusko Jaurlaritzarekin eta Arabako Parke Teknologikoarekin lankidetzan, satelite- belaunaldi berri bat garatzen ari da klima-aldaketa monitorizatzeko eta Euskadiko baliabideen kudeaketa hobetzeko.

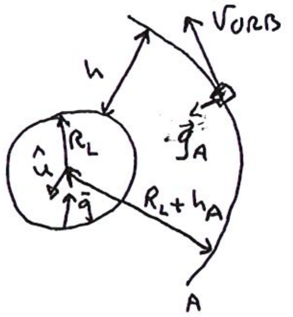
Zure bisitan, funtsezko problema bat esleitu dizute: garatzen ari den sateliteetako bat, $400kg$-ko masakoa, orbita zirkular batean dago, lurrazaletik h altueran. SENER enpresako ekipoaren arabera, Lurraren gainazaleko grabitatearen herena da altuera horretako grabitatearen balioa. Fisikako zure ezagutzak erabiliz, honako hau konpontzen lagundu behar duzu:

1. Azaldu zehatz-mehatz satelitea bere orbitan mantentzeko lana egin behar ote den, eta justifikatu zure erantzuna printzipio fisikoak erabiliz, hala nola energiaren kontserbazioa eta grabitate-eremuaren eraginpeko higidura.
2. Lortu orbitaren ezaugarri nagusiak.
3. Lortu Lurraren gainazaletiko satelitearen h altuera.
4. Kalkulatu orbitaren periodoa eta satelitearen energia mekaniko osoa.

Aipatutako problema ebaztean zure Fisikako ezagutzak benetako egoera batean aplikatzeko aukera izateaz gain zuzenean lagundu ahal izango duzu klima-aldaketaren jarraipenerako eta eskualdeko baliabideen kudeaketarako inplikazio esanguratsuak dituen teknologia garatzen. Esperientzia honek ikuspegi paregabea emango dizu Fisikak eta Ingeniaritzak eremu aeroespazialean dituzten aplikazio praktikoei buruz.

Datuak:

- $g = 9{,}8\, m/s^2$ (grabitazioren azelerazioa, Lurraren gainazalean)
- $R_L = 6{,}4 \times 10^6 m$ (Lurraren erradioa)



1. Satelitearen gainean eragiten duen indar bakarra indar grabitatorioa da, eta era perpendikularrean eragiten dio abiadurari, horrela bere lana nulua da. $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos 90° = 0\,J$

2, 3. eta 4. atalak:

Dakigunez $\bar{g}_A$ gainazalean dagoenaren herena da.

Bere formula A orbitan aplikatzen: $g_A = G \dfrac{M_L}{(R_L + h_A)^2}$

Eta gainazalean dagoena: $g = G \dfrac{M_L}{R_L^2}$

$\Bigg\} \; g_A = \dfrac{g}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow G \frac{M_L}{(R_L + h_A)^2} = \frac{G}{3} \frac{M_L}{R_L^2} \Rightarrow 3 \cdot R_L^2 = (R_L + h_A)^2 \rightarrow 3R_L^2 = R_L^2 + h_A^2 + 2h_A \cdot R_L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_A^2 + 2R_L h_A - 2R_L^2 = 0 \rightarrow h = \frac{-2R_L \pm \sqrt{4R_L^2 + 8R_L^2}}{2} = -R_L \pm R_L\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \begin{cases} \boxed{h_{A_1}} = -6'4 \cdot 10^6 + 6'4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{3} = 6'4 \cdot 10^6 (\sqrt{3} - 1) = \boxed{4'68 \cdot 10^6 m} \\ h_{A_2} = -6'4 \cdot 10^6 - 6'4 \cdot 10^6 \sqrt{3} \Rightarrow \text{ezin da altuera negatiborik.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Beraz orbitaren altuera } 4'68 \cdot 10^6 m \text{ da.}}$

Abiadura orbitala kalkulatzeko, G konstantearen balioa ez daukagunez, A orbitan dagoen azelerazioaren balioa erabiliko dugu. Badakigu $g_A = \frac{g}{3}$ dela, eta aldi berean, sateliteari eragiten dion indar bakarrak, abiadurarekin era perpendikularrean egiten duenez, indar hori, grabitatorioa, indar zentripetua da.

$$F_z = m \cdot a_N = m \cdot g_A \rightarrow a_N = g_A \rightarrow \frac{V_{ORB}^2}{R_A} = \frac{g}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{V_{ORB}} = \sqrt{\frac{g R_A}{3}} = \sqrt{g \frac{(R_L + h_A)}{3}} = \sqrt{9'8 \frac{(6'4 \cdot 10^6 + 4'68 \cdot 10^6)}{3}} =$$

$$= \boxed{6.016,2 \ m/s}$$

Orbitaren periodoa kalkulatzeko abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz: $v = w \cdot R \rightarrow v = \frac{2\pi}{T} \cdot R$ Orbita zirkularra delako.

Holan: $\boxed{T} = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2\pi(R_L + h_A)}{V_{ORB}} = \frac{2\pi (6'4 \cdot 10^6 + 4'68 \cdot 10^6)}{6.016,2} = 13660'46 s =$

$$= \boxed{3'79 h}$$

Energia mekanikoa orbitan:

$$E_m = E_p + E_z = -G \frac{M_L m_S}{R_A} + \frac{1}{2} m_S V_{ORB}^2 \ ; \left(\text{jakinda } g_A = G \frac{M_L}{R_A^2} = \frac{g}{3} \right)$$

$$\boxed{E_m} = -\frac{g}{3} R_A \cdot m_S + \frac{1}{2} m_S \cdot V_{ORB}^2 = -\frac{9'8}{3} \cdot 400 (6'4 \cdot 10^6 + 4'68 \cdot 10^6) + \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 6016'2^2 =$$

$$= \boxed{-7'24 \cdot 10^9 \ J}$$ Logikoki negatiboa, eremu grabitatorioan lotuta dagoelako.

2025-6-1 Galileo izeneko satelite-sistema, Espazioko Europar Agentziak (ESA) garatutakoa bera, sateliteen bidezko nabigazio-sistema da, EEBBetako GPS sistema eta Errusiako GLONASS sistemen lehiakidea Denbora gutxi dela, bertako medioetan argitaratu izan da Euskaditik ere, Added Value Solutions (AVS) enpresaren bidez, egon dela ekarpena, sateliteetako diseinuari eta osagaiei dagokienez. Altuera jakinetan jarduten duten sateliteak funtsezkoak dira bereizmen handiko nabigaziorako eta kokatze globalerako.

ESArekin elkarlanean eta diseinu-talde baten kide zarela, Galileo sistemako satelite baten eragiketa-parametroak kalkulatzea esleitu dizute, satelitearen ezaugarri fisikoak eta orbitaren ezaugarriak ezagututa. Ariketa honen helburua honako hau da: eskoletan ikasitako gako-kontzeptuak egoera erreal batean aplikatzea.

Hartu aintzakotzat honako egoera hau:

Galileo sistemako satelite bat, m = $700kg$ masakoa bera, orbita zirkularrean higituz doa, Lurraren gainazaletik gorako H altueran. Satelitearen abiadura v da, zeinari esker, satelitearen egonkortasuna orbitan ziurtatuta dagoen. Zure lana da gako diren parametroak lortzea, beheko zerrendakoak.

Atazak:

1. **Azaldu nola lortu behar den H altuera**:
   Demagun ezagutzen duzula satelitearen abiadura: v. Azaldu nola kalkulatu daitekeen zer *altueratan* kokatu behar den satelitea, orbita zirkular egonkorra izan dadin orbitan. Azaldu parte hartzen duten indarren arteko orekak ezarri duen baldintza hori. Ziurtatu azalduko dituzula erabiliko dituzun kontzeptuak eta lege fisikoak.

2. **Kalkulatu orbita-abiadura v**:
   Demagun ezagutzen duzula *altuera*: H = $23222km$ = $2{,}3222 \times 10^7 m$. Lortu zer abiadurarekin higitu behar duen sateliteak, orbita zirkularrean higitzeko. Justifikatu emaitza orbiten mekanikako kontzeptuak erabiliz.

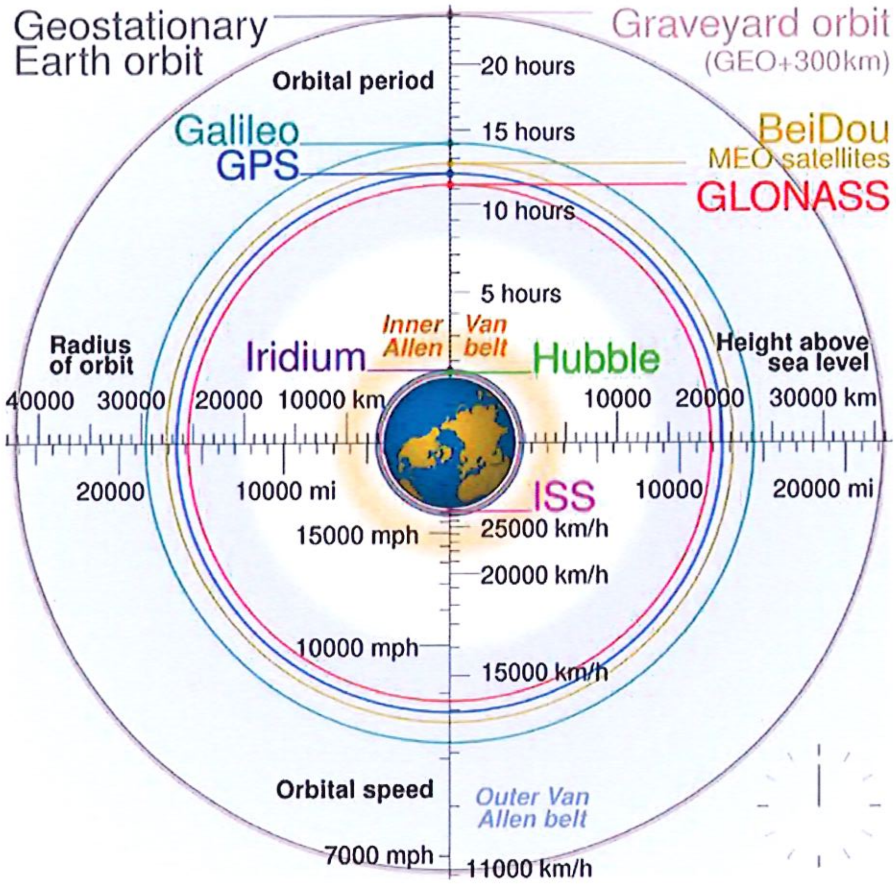
3. **Zenbatetsi beharrezkoa den energia osoa**:
   Lortu zenbateko energia behar den H altueran kokatzeko satelitea eta orbita zirkularrean mantentzeko. Eztabaidatu aipatutako energiaren barne daudela energia zinetikoa eta energia potentzial grabitatorioa.

4. **Lortu orbita-periodoa (T)**:
   Zenbatetsi periodoa, hots, Lurrari bira osoa emateko zenbateko denbora behar duen aipatutako sateliteak. Arrazoitu fisika eta emaitza lortzeko erabilitako lege fisikoak.

Datuak:

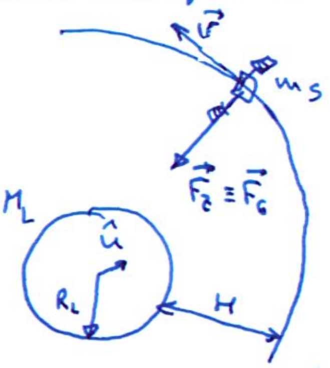
- $G = 6{,}67 \times 10^{-11} N\, m^2/kg^2$
- $M_{Lurra} = 5{,}98 \times 10^{24} kg$
- $R_{Lurra} = 6370 km$

Lortu dituzun emaitzak ***era kualitatiboan*** egiazta ditzakezu honako irudiko informazio erabiliz:



1. Altuera orbita zirkularrean (H).

Orbita zirkularra osatzeko beharrezkoa da indar zentripetua egotea. $\vec{F_z} = -m_S \dfrac{v^2}{R_L+H}\,\hat{u}$



Aldi berean satelitean eragina daukan indar bakarra Newtonek deskribaturiko indar grabitatorioa da:

$$\vec{F_G} = -G\,\frac{M_L\cdot m_s}{(R_L+H)^2}\cdot\hat{u}$$

Gainera F_G perpendikularra da satelitearen abiadura linealarekiko, beraz argi dago bi indarrak baliokideak direla: $\vec{F_z} \equiv \vec{F_G}$

Bien moduluak berdinduz: $F_z = F_G \rightarrow$

$$\rightarrow m_S\,\frac{v^2}{R_L+H} = G\,\frac{M_L\cdot m_S}{(R_L+H)^2} \rightarrow R_L+H = \frac{G\cdot M_L}{v^2} \rightarrow \boxed{H = \frac{G\cdot M_L}{v^2} - R_L}$$

2. Abiadura orbitala (v).

Aurreko ataleko arrazonamendu berdinagatik, indar zentripetuaren eta indar grabitatorioaren moduluak berdinduko ditugu: $F_z = F_G \rightarrow m_S \dfrac{v^2}{R_L+H} = G\dfrac{M_L m_S}{(R_L+H)^2} \rightarrow$

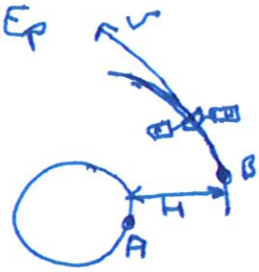
$$\rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_L}{R_L+H}}$$; Datuak ordezkatuta $\rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'98\cdot10^{24}}{6'37\cdot10^{6}+2'3222\cdot10^{7}}} = 3671'35\ m/s = 3,671\ Km/s}$$

3. Orbitan jartzeko energia osoa

Satelitea orbitan jartzeko bi energia mota eman behar zaizkio. Alde batetik eta lehena, Lurraren gainazaletik orbitaren altuerarano igotzeko eman behar zaiona, eta bigarrena orbita zirkularra osatzean lortu behar duen abiadura orbitala emango diona.

Lehena energia potentzialaren aldaketa da: ΔE_p



$$\Delta E_p = E_{p_B} - E_{p_A} = -G\frac{M_L m_S}{R_L+H} + G\frac{M_L m_S}{R_L}$$

Bigarrena energia zinetikoa da: E_z

$$E_z = \frac{1}{2} m_S\cdot v^2$$

Beraz eman behar zaion energia: $E = \Delta E_p + E_z \rightarrow$

$$\rightarrow E = -G\frac{M_L m_S}{R_L+H} + G\frac{M_L m_S}{R_L} + \frac{1}{2}m_S\, v^2$$; Datuak ordezkatuta:

$$\boxed{E = -6'67\cdot10^{-11}\cdot5'98\cdot10^{24}\cdot700\left(\frac{1}{6'37\cdot10^6+2'3222\cdot10^7} - \frac{1}{6'37\cdot10^6}\right) + \frac{1}{2}700\cdot3671'35^2 = 3'91\cdot10^{10}\ J}$$

4. Periodoa (T)

Abiadura lineala ezagututa abiadura angeluarrarekin erlazionatuko dugu:

$$v = \omega\cdot R \rightarrow v_S = \frac{2\pi}{T}\cdot(R_L+H) \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi(R_L+H)}{v_S} = \frac{2\pi(6'37\cdot10^6+2'3222\cdot10^7)}{3671'35} =}$$

$$\boxed{= 50644\,s = \frac{50644}{3600}\,h = 14'06\ ordu}$$

2024-07-A.1.- Izar nano gorri baten inguruan biraka dagoen planeta bat aurkitu da duela gutxi. Nano gorri horren masa Eguzkiaren masaren % 12 da, eta erradioa Eguzkiaren erradioaren % 14.

Gainera, planeta horren izarraren inguruko biraketaren periodoa neurtu da: 11,2 egun.

Lortu honako hauek:

a) Grabitatearen azelerazioa izarraren gainazalean.

b) Planetaren orbitaren erradioa, orbita zirkularra dela onartuta.

c) Zenbat energia gehitu behar zaion planetak jada daukan energiari izarraren eraginpetik ihes egin dezan.

Datuak:

- Grabitazio unibertsalaren konstantea: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
- Eguzkiaren masa: $ME = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
- Eguzkiaren erradioa: $RE = 7 \cdot 10^8$ m

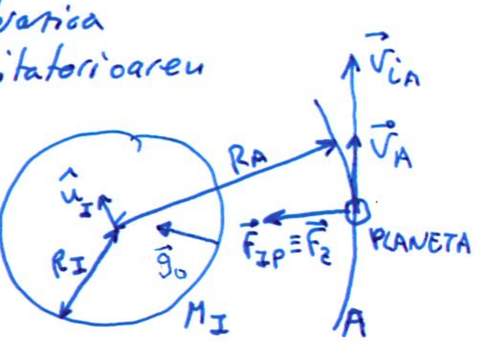
a) Hasteko izarraren datuak adieraziko ditut:

Izarraren masa : $M_I = M_E \cdot 0'12 = 1'99\cdot10^{30}\cdot 0'12 = 2'39\cdot10^{29}$ Kg

Izarraren erradioa: $R_I = R_E \cdot 0'14 = 7\cdot10^8\cdot 0'14 = 9'8\cdot10^7$ m

Izarraren gainazalean dagoen Grabitatearen azelerazioa kalkulatzea puntu horretan izarraren eremu grabitatorioaren intentsitate bektorea kalkulatzea da:

$$\boxed{\vec{g}_0 = -G\frac{M_I}{R_I^2}\hat{u}_I = -6'67\cdot10^{-11}\frac{2'39\cdot10^{29}}{(9'8\cdot10^7)^2}\hat{u} = -1'66\,\hat{u}\,\frac{m}{s^2}}$$



b) Planetaren gainean eragiten duen indar bakarra izarrarena denez (beste planeten posibleen indarrak baztertuta), orbita zirkularra denez eta indar grabitatorioa orbitarekiko perpendikularra izanik, planetak jasaten duen indar grabitatorioa indar zentripetua da:

$\vec{F}_{IP} \equiv \vec{F}_z$ → Moduluak berdinduz: $G\frac{M_I M_P}{R_A^2} = M_P\frac{v_{ORB_A}^2}{R_A} \rightarrow v_{ORB_A} = \sqrt{G\frac{M_I}{R_A}}$ (1)

Bestaldetik, abiadura lineal hori abiadura angeluarrarekin erlazionatuz:

$v = \omega\cdot R \rightarrow v_{ORB_A} = \frac{2\pi}{T_A}\cdot R_A$ (2)

$$\boxed{v_{ORB_A} = \frac{2\pi\cdot 7'23\cdot10^9}{11'2\cdot24\cdot3600} = 4'69\cdot10^4\,\frac{m}{s}}$$

(1) eta (2) berdinduz: $\frac{2\pi}{T_A}\cdot R_A = \sqrt{G\frac{M_I}{R_A}} \rightarrow \frac{4\pi^2 R_A^2}{T_A^2} = G\frac{M_I}{R_A} \rightarrow R_A = \sqrt[3]{\frac{G M_I\cdot T_A^2}{4\pi^2}} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{R_A = \sqrt[3]{6'67\cdot10^{-11}\cdot 2'39\cdot10^{29}\cdot(11'2\cdot24\cdot3600)^2/(4\pi^2)} = 7'23\cdot10^9\,m}$$

c) Energia gehigarri horrekin (E) planeta infinituraino helduko da. Eremu grabitatorioa zentrala denez kontserbakorra da, honela: $E_{m_A} + E = E_{m_\infty} \rightarrow$

$$\rightarrow E_{PA} + E_{ZA} + E = E_{P\infty} + E_{Z\infty} \rightarrow -G\frac{M_I M_P}{R_A} + \frac{1}{2}M_P v_{ORB_A}^2 + E = -G\frac{M_I M_E}{R_\infty} + \frac{1}{2}M_E\cdot v_\infty^2 \xrightarrow[v_\infty = 0]{R_\infty = \infty}$$

$$\rightarrow \boxed{E = \left[6'67\cdot10^{-11}\frac{2'39^{29}}{7'23\cdot10^9} - \frac{1}{2}(4'69\cdot10^4)^2\right]M_P = M_P\cdot 1'1\cdot10^9\,J} \text{ edo } \boxed{E = 1'1\cdot10^9\,J/Kg}$$

2024 -6-A.1.- Espazio-ontzi tripulatu bat espazioratu da, eta Lurraren gainazaletik 315 km-ra jarri da orbitatzen. Espazio-ontziaren eta astronautaren masa osoa 2500 kg da.

a) Lortu zenbatekoa den Lurrak eragindako grabitatearen azelerazioa aipatutako orbitan.

b) Kalkulatu zenbat bira egin duen espazio-ontziak Lurraren inguruan 90 s-an.

c) Gutxienez zenbat energia estra gehiago eman behar diogu espazio-ontziari, Lurraren eraginetik ihes egin dezan erabat?

Datuak:

- $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
- Lurraren masa: $ML = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
- Lurraren erradioa: $RL = 6371$ km

a) Eskatzen zaiguna eremuaren intentsitatea da, beraz bere formularekin: $\boxed{\vec{g}_A = -G\frac{M_L}{R_A^2}\hat{u} = -6'67\cdot10^{-11}\frac{5'97\cdot10^{24}}{[(6371+315)\cdot10^3]^2}\hat{u} = -8'91\hat{u}\ m/s^2}$

b) Horretarako lehenengo abiadura orbitala kalkulatuko dut. Jakinda espazio-ontziaren gainean bakarrik Lurraren erakarpeneko indar grabitatorioak eragiten duela eta abiadurarekiko era perpendikularrean egiten duela, indar grabitatorioa eta indar zentripetua berdinduko ditzakegu:

$$\vec{F}_Z \equiv \vec{F}_G \rightarrow F_Z = F_G \rightarrow m_S\cdot\frac{V_{ORB_A}^2}{R_A} = G\frac{M_L\cdot m_S}{R_A^2} \rightarrow V_{ORB_A} = \sqrt{G\frac{M_L}{R_A}} = \sqrt{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'97\cdot10^{24}}{(6371+315)\cdot10^3}} = 7'72\cdot10^3\ \frac{m}{s}$$

Orain abiadura lineal hori eta angeluarra erlazionatuz:

$$v = \omega\cdot R \rightarrow V_{ORB_A} = \frac{2\pi}{T_A}\cdot R_A \rightarrow T_A = \frac{2\pi R_A}{V_{ORB_A}} = \frac{2\cdot\pi\cdot(6371+315)\cdot10^3}{7'72\cdot10^3} = 5443'51\ \frac{s}{bira}$$

Beraz 90 s-an → Bira kopurua $= \frac{90\ s}{5443'51\ s/bira} = \boxed{0'017\ bira}$ 90 s-an

c) Orbitan dagoela, eman beharreko energia gehigarria infinituraino heltzeko behar duena edo handiagoa da. Dakigunez eremu grabitatorioa zentrala da, orduan kontserbakorra da, eta holan A orbitan eduki behar duen energia mekanikoa infinituan edukiko duena da: $E_{m_A} = E_{m_\infty} \rightarrow E_{P_A} + E_{Z_A} + E_{ESTRA} = E_{P_\infty} + E_{Z_\infty} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{E_{ESTRA}} = -E_{P_A} - E_{Z_A} + E_{P_\infty} + E_{Z_\infty} = G\frac{M_L\cdot m_S}{R_A} - \frac{1}{2} m_S V_{ORB_A}^2 - G\frac{M_L m_S}{R_\infty} + \frac{1}{2} m_S V_\infty^2 \qquad \frac{V_\infty = 0}{R_\infty = \infty}$$

$$= 6'67\cdot10^{-11}\frac{5'97\cdot10^{24}\cdot2500}{(6371+315)\cdot10^3} - \frac{1}{2}2500\cdot(7'72\cdot10^3)^2 + 0 + 0 = \boxed{7'44\cdot10^{10}\ J}$$

2023-7-A1

Marteren gainazalean dagoen gorputz baten masa da $100kg$; eta, puntu horretan, eremu grabitatorioaren intentsitatea, $3{,}7ms^{-2}$.

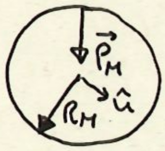
a) Zenbat da gorputz horren pisua, Marteren masa bereko baina Marteren erradioaren erdia duen beste planeta bate gainazalean?

b) Aintzakotzat hartu hirugarren planeta bat, Marteren masaren herenekoa bera, baina Marteren erradio berekoa. Zenbat da gorputz horren pisua, hirugarren planeta horren gainazalean?

c) Aipatutako planeten kasuetan, Marte eta a) eta b) ataletakoak, m masako gorputz bana, $2 \times R_{\text{Marte}}$ erradioko orbita zirkularrean birarazi dira, haien inguruan: alderatu gorputzen abiadurak.

Hasteko Marten dagoan egoera aztertuko dogu:

$$\vec{P}_M = \vec{g}_M \cdot m = -3'7\,\hat{u} \cdot 100 = -370\,\hat{u}\,N$$



MARTE $\begin{cases} M_M \\ R_M \end{cases}$

$$\vec{g}_M = -G\frac{M_M}{R_M^2}\hat{u}$$

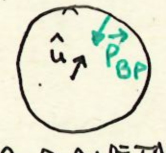
a) $$\vec{g}_{AP} = -G\frac{M_M}{\left(R_M/2\right)^2}\hat{u} = -4 \cdot G\frac{M_M}{R_M^2}\hat{u} = 4\vec{g}_M = -14'8\,\hat{u}\ m/s^2$$

A PLANETA $\rightarrow \begin{cases} M_M \\ R_M/2 \end{cases}$

Holan A planetan daukan pisua:

$$\boxed{\vec{P}_{AP} = m \cdot \vec{g}_{AP} = 100 \cdot (-14'8\,\hat{u}) = -1480\,\hat{u}\,N}$$

b) $$\vec{g}_{BP} = -G\frac{M_M/3}{R_M^2}\hat{u} = -\frac{1}{3}G\frac{M_M}{R_M^2}\hat{u} = \frac{1}{3}\vec{g}_M = -1'23\,\hat{u}\ m/s^2$$



B PLANETA $\rightarrow \begin{cases} M_M/3 \\ R_M \end{cases}$

Holan pisua B planetan:

$$\boxed{\vec{P}_{BP} = m \cdot \vec{g}_{BP} = 100 \cdot (-1'23\,\hat{u}) = -123\,\hat{u}\,N}$$

c) Hiru kasuetarako arrazonamendu bardina aplikatuko dogu. Orbitan dagozalako eragiten deutsen indar bakarra grabitatorioa da, eta bera, orbitekaz perpendikularra izanik indar zentripetuagaz identifikatu daikegu.

$\vec{F}_z \equiv \vec{F}_G$; moduluak bardinduz: $m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow v_{ORB} = \sqrt{G\frac{M}{R}}$

Holan:

1) MARTEN: $v_{ORB_M} = \sqrt{G\frac{M_M}{2R_M}}$

2) A PLANETAN: $v_{ORB_{AP}} = \sqrt{G\frac{M_{AP}}{2R_M}} = \sqrt{G\frac{M_M}{2R_M}}$

3) B PLANETAN $v_{ORB_{BP}} = \sqrt{G\frac{M_{BP}}{2R_M}} = \sqrt{G\frac{M_M}{6R_M}}$

$\rightarrow \boxed{v_{ORB_M} = v_{ORB_{AP}}}$

$\boxed{v_{ORB_M} = v_{ORB_{BP}} \cdot \sqrt{3} = 1'73\,v_{ORB_{BP}}}$

$\boxed{v_{ORB_{AP}} = v_{ORB_{BP}} \cdot \sqrt{3} = 1'73\,v_{ORB_{BP}}}$

Masa txikiena daukan planetan abiadura orbitala txikiagoa da, logikoa danez.

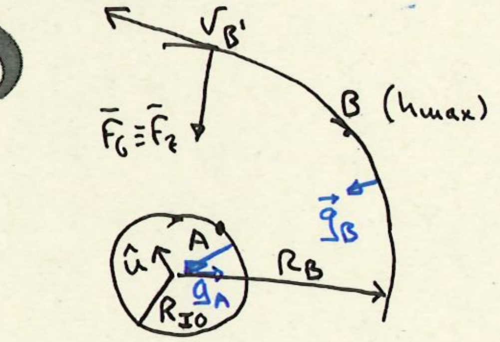
2023-6-A1

Io da Jupiter planetatik gertuen dagoen satelitea; haren erradioa $R_{Io} = 1{,}82 \times 10^6$ m da eta masa, berriz, $M_{Io} = 8{,}94 \times 10^{22}$ kg. Io satelitearen gainazaletik suziri bat jaurti da, eta lortu duen altuera maximoa hau da: $h = (9/7)R_{Io}$. Lortu honako hauek:

a) Suziriaren jaurtitze-abiadura, aipatutako altuera maximoa lortzeko.
b) Grabitate-azelerazioaren balioa honako bi puntu hauetan: Io satelitearen gainazalean, eta suziriak lortu duen altuera maximoan.
c) Demagun suziriak lortu duen altuera maximoan orbita zirkularrean biraka dagoela suziria. Zein da errotazio-periodo orbitala?

Datuak:

$$G = 6{,}67 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}$$



a) Eremu grabitatorioa zentrala danez kontserbakorra da eta holan: $E_{mA} = E_{mB} \rightarrow$

$\rightarrow E_{pA} + E_{zA} = E_{pB} + E_{zB} \rightarrow$

$\rightarrow -G\frac{M_{Io}m}{R_{Io}} + \frac{1}{2}mv_A^2 = -G\frac{M_{Io}\cdot m}{R_B} + \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow$

$\boxed{R_B} = R_A + h = R_{Io} + \frac{9}{7}R_{Io} = \frac{16}{7}R_{Io} = \frac{16}{7}\cdot 1'82\cdot 10^6 = \boxed{4'16\cdot 10^6\,m}$

→ Lurrean emondako v_A abiadurgaz justu B punturaino helduko gara, sobrako abiadura barik ($v_B = 0$) →

$\rightarrow \boxed{v_A} = \sqrt{2\cdot G M_{Io}\left(\frac{1}{R_{Io}} - \frac{1}{R_B}\right)} = \sqrt{2\cdot 6'67\cdot 10^{-11}\cdot 8'94\cdot 10^{22}\left(\frac{1}{1'82\cdot 10^6} - \frac{1}{4'16\cdot 10^6}\right)} =$

$= \boxed{1919'87\,m/s}$

b) Zuzenean g-ren formulagaz: $\vec g = -G\frac{M_{Io}}{R^2}\hat u$

$\boxed{\vec g_A = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{8'94\cdot 10^{22}}{(1'82\cdot 10^6)^2}\hat u = -1'8\,\hat u\,m/s^2}$

$\boxed{\vec g_B = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot 8'94\cdot 10^{22}/(4'16\cdot 10^6)^2 = -0'34\,\hat u\,m/s^2}$

c) Indar bakarra grabitatorioa da eta berak indar zentripetua izango da:

$\vec F_z \equiv \vec F_G$ → moduluakaz: $F_z = F_G \rightarrow m\frac{v_{B'}^2}{R_B} = G\frac{M_{Io}m}{R_B} \rightarrow v_{B'} = \sqrt{G\frac{M_{Io}}{R_B}} = \sqrt{\frac{6'67\cdot 10^{-11}\cdot 8'94\cdot 10^{22}}{4'16\cdot 10^6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{B'} = 1197'25\,m/s$ ⇒ Abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz:

$v = \omega\cdot R = \frac{2\pi}{T}\cdot R \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{v}\cdot R = \frac{2\pi\cdot R_B}{v_{B'}} = \frac{2\pi\cdot 4'16\cdot 10^6}{1197'25} = 21.831'73\,s}$

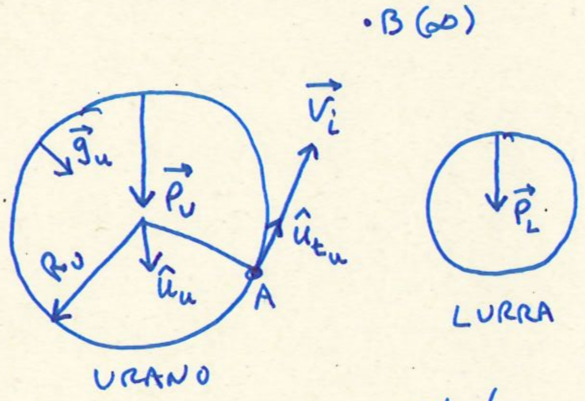
2022-7-A1

Grabitatearen azelerazioak 8,9 m/s^2-ko balioa du Uranon. Kalkulatu:

a) Uranoren batez besteko erradioa.
b) Zer pisu izango duen Uranon Lurraren gainazalean 1100 N-eko pisua duen objektu batek.
c) Uranoren gainazaletik ihes egiteko abiadura.

Datuak: $M_U = 8,68*10^{25}$ *kg.* $M_L = 5,98*10^{24}$ *kg. Lurraren erradioa:* $R_L = 6.370$ *km.*

G= $6,67*10^{-11}\ N*m^2*kg^{-2}$



a) Emoten diran datuak erabiliz, eta jakinda grabitatearen azelerazioa eremu grabitatorioaren intentsitatea dala:

$$|\vec{g}_u| = G\frac{M_u}{R_u^2} \rightarrow \boxed{R_u = \sqrt{\frac{G\cdot M_u}{|\vec{g}_U|}}} = \sqrt{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot 8'68\cdot10^{25}}{8'9}} = \boxed{2'55\cdot10^{7}\ m}$$

b) Pisuaren formulatik: $\vec{P} = m\cdot\vec{g}$, moduluak hartuz: $P = m\cdot g$

Lurrean: $P_L = m\cdot g_L \rightarrow m = \frac{P_L}{g_L} = \frac{P_L}{G\frac{M_L}{R_L^2}} = \frac{1100\,(6'37\cdot10^{6})^2}{6'67\cdot10^{-11}\cdot 5'98\cdot10^{24}} = 111'9\ Kg$

Uranon: $\boxed{\vec{P}_U = m\cdot\vec{g}_u = -111'9\cdot 8'9\,\hat{u}_u = -995'94\,\hat{u}_u\ N}$

c) Ihes-abiaduragaz infinituraino heltzeko energia lortzen da. Eremu Grabitatorioa kontserbakorra danez energia mekanikoa kontserbatzen da. Ihes-abiaduragaz infinitura heltzeko energia nahikoa emongo deutsagu, ez gehiagorik, holan abiadura infinituan zero dala ulertzen da.

$$E_{m_A} = E_{m_B} \rightarrow E_{zA} + E_{pA} = E_{z\infty} + E_{p\infty} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v_{iA}^2 - G\frac{M_U m}{R_U} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 - G\frac{M_U\cdot m}{R_\infty} \xrightarrow[R_\infty=\infty]{v_\infty=0} \frac{1}{2} v_{iA}^2 - G\frac{M_U}{R_U} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v}_{iA} = \sqrt{2G\frac{M_U}{R_U}}\,\hat{u}_{tu} = \sqrt{2\cdot 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{8'68\cdot10^{25}}{2'55\cdot10^{7}}}\,\hat{u}_{tu} = 2'13\cdot10^{4}\,\hat{u}_{tu}\ m/s}$$

2022-6-A1

Espaziontzi bat lotuta geratu da orbita zirkular baten ezezaguna den planeta baten inguruan. Nabegazio sistemek abiadura orbitala 25000 $km \cdot h^{-1}$ dela eta planetaren inguruan bira oso bat emateko 5 ordu behar duela adierazten dute.

a) Kalkulatu zein den orbita zirkularraren erradioa.
b) Kalkulatu planetaren masa.
c) Planetaren dentsitatea 16150 $kg \cdot m^{-3}$ dela jakinda, kalkulatu planetaren erradioa eta grabitatearen azelerazioa bere gainazaleko puntu baten.

Datuak: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a) Abiadura orbitala eta periodoa ezagutzen doguzez, abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz orbitaren erradioa kalkulatuko dogu.

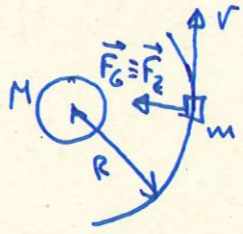
Horren aurretik: $v = 25000 \frac{km}{h} \cdot \frac{1h}{3600s} \cdot \frac{1000m}{1km} = 6944'4\ m/s$

$$T = 5\ ordu \cdot \frac{3600s}{1\ ordu} = 18000s$$

$$v = \omega \cdot R \to v = \frac{2\pi}{T} \cdot R \to \boxed{R = \frac{v}{2\pi} \cdot T = \frac{6944'4 \cdot 18000}{2 \cdot \pi} = 1'99 \cdot 10^7\ m}$$

b) Orbita zirkularra izanik eta jakinda indar grabitatorioa eragiten dauan bakarra danez, hau indar zentripetuagaz identifikatuko dogu.

$\vec{F_z} \equiv \vec{F_G} \Rightarrow$ moduluak berdinduz $\to$



$$\to m \frac{v^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} \to M = \frac{v^2 \cdot R}{G} \to$$

$$\to \boxed{M = \frac{6944'4^2 \cdot 1'99 \cdot 10^7}{6'67 \cdot 10^{-11}} = 1'44 \cdot 10^{25}\ Kg}$$

c) Planetaren dentsitatea jakinda, eta esferikoa danez bere bolumena kontuan hartuz: $V = 4/3 \cdot \pi \cdot R^3$

$$d = \frac{M}{V} \to d = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \to \boxed{R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4 \cdot \pi \cdot d}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1'44 \cdot 10^{25}}{4 \cdot \pi \cdot 16150}} = 5'97 \cdot 10^6\ m}$$

Gainazalaren gaineko grabitatearen azelerazioa planeta horrek puntu horretan daukan eremu grabitatorioaren intentsitate bektorearen modulua da:

$$\boxed{g = G \frac{M}{R^2} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1'44 \cdot 10^{25}}{(5'97 \cdot 10^6)^2} = 26'94\ m/s^2}$$

2021-7-A1

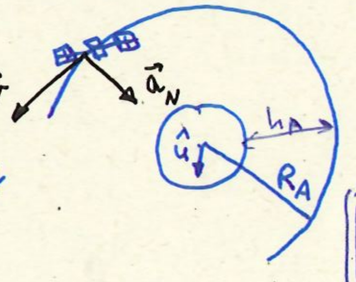
A1.- Lurraren inguruan orbita zirkular batean dagoen 700 kg-ko masako satelite artificial batek 48 ordu behar ditu Lurraren inguruan bira bat egiteko.

Kalkulatu:

a) Zer altueratan dagoen satelitea Lurraren gainazalarekiko.
b) Zenbatekoa den satelitearen azelerazioa orbita horretan.
c) Zer periodo izango duen sateliteak Lurraren gainazaletik Lurraren erradioaren distantzia bikoitzera jartzen bada.

DATUAK: Lurraren masa: M_L= 5,98*10^{24} kg. Lurraren erradioa: R_L= 6.370 km.

G= 6,67*10^{-11} N*m^2*kg^{-2}



a) Indar grabitatorioa indar zentripetuaren papera betetzen duenez, biak baliokideak dira: $\vec{F}_Z = \vec{F}_G \to F_Z = F_G \to m\frac{v_A^2}{R_A} = G\frac{Mm}{R_A^2} \to$

$\to v_A = \sqrt{G\frac{M}{R_A}}$

Bestaldetik: $v_A = \omega_A \cdot R_A = \frac{2\pi}{T_A}\cdot R_A$ Berdinduz: $\frac{2\pi}{T_A}\cdot R_A = \sqrt{G\frac{M}{R_A}} \to$

$\to \frac{4\pi^2}{T_A^2}\cdot R_A^2 = G\frac{M}{R_A} \to \boxed{R_A = \sqrt[3]{\frac{GMT_A^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot 5'98\cdot10^{24}(48\cdot3600)^2}{4\pi^2}} = 6'71\cdot10^7 m}$

$\boxed{h_A = R_A - R_L = 6'07\cdot10^7 m}$

b) Azelerazio normala da: $\boxed{\vec{a}_{N_A} = \frac{v_A^2}{R_A}(-\hat{u}) = -\frac{G\frac{M}{R_A}}{R_A}\hat{u} = -G\frac{M}{R_A^2}\hat{u} =}$

$= -6'67\cdot10^{-11}\frac{5'98\cdot10^{24}}{(6'71\cdot10^7)^2}\hat{u} = \boxed{-0'089\hat{u}\ m/s^2}$

c) Berriro:

$v_B = \omega_B\cdot R_B \to v_B = \frac{2\pi}{T_B}\cdot R_B$

$v_B = \sqrt{G\frac{M_L}{R_B}}$

$\frac{2^2\pi^2}{T_B^2}R_B^2 = G\frac{M_L}{R_B} \to T_B = \sqrt{\frac{2^2\pi^2R_B^3}{GM_L}} \to$

$(R_B = 3R_L) \Rightarrow \boxed{T_B = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(3\cdot6'37\cdot10^6)^3}{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'98\cdot10^{24}}} = 26.281'93 s}$

Edo zuzenean Kepleren 3. legea: $\frac{T_B^2}{R_B^3} = \frac{T_A^2}{R_A^3} \to$

$\to \boxed{T_B = \sqrt{\frac{T_A^2\cdot R_B^3}{R_A^3}} = \sqrt{\frac{(48\cdot3600)^2\cdot(3\cdot6'37\cdot10^6)^3}{(6'71\cdot10^7)^3}} = 26.263'4 s}$

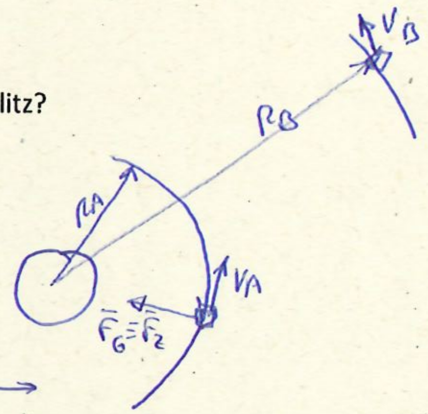
2021-6-A1

A1.- Satelite bat biraka ari da planeta baten inguruan *R* erradioko orbita zirkular batean, *v* abiaduran.

Kalkulatu:

a) Biraketa-periodoa.
b) Planetaren masa.
c) Zein litzateke biraketa-periodoa, orbitaren erradioa hirukoiztuko balitz?

*DATUAK: R = 15.000 km; v = 9 km/s; G= 6,67*10-11 N*m²*kg⁻²*



a) Abiadura angeluarra eta lineala erlazionatuz: $v = \omega \cdot R \rightarrow v_A = \frac{2 \cdot \pi}{T_A} \cdot R_A \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{T_A = \frac{2\pi}{v_A} \cdot R_A = \frac{2\pi}{9000} \cdot 1'5 \cdot 10^7 = 10.471'97\,s}$$

b) Orain abiadura orbitalaren bitartez. Horretarako satelitean eragiten duen indar bakarra grabitazionala danez, hau indar zentripetuagaz identifikatu daikegu. $\vec{F}_G = \vec{F}_Z \rightarrow$ Moduluak hartuz:

$$F_G = F_Z \xrightarrow{G.U.L} G\frac{M \cdot m}{R_A^2} = m\frac{v_A^2}{R_A} \rightarrow M = \frac{v_A^2 \cdot R_A}{G} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{M = \frac{9000^2 \cdot 1'5 \cdot 10^7}{6'67 \cdot 10^{-11}} = 1'82 \cdot 10^{25}\,kg}$$

c) Zuzenean Kepleren 3. legea aplikatuz: $\frac{T_B^2}{R_B^3} = \frac{T_A^2}{R_A^3} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{T_B = \sqrt{\frac{T_A^2 \cdot R_B^3}{R_A^3}} = \sqrt{\frac{10471'97^2 \cdot (3 \cdot 1'5 \cdot 10^7)^3}{(1'5 \cdot 10^7)^3}} = 10471'97\sqrt{27} = 54.414\,s}$$

—o—o—

Edo bestela: $F_Z = F_G \rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow v_B = \sqrt{G\frac{M}{R_B}} \rightarrow$

$$\rightarrow v_B = \sqrt{\frac{6'67 \cdot 10^{-11}\ 1'82 \cdot 10^{25}}{3 \cdot 1'5 \cdot 10^7}} = 5193'88\,m/s$$

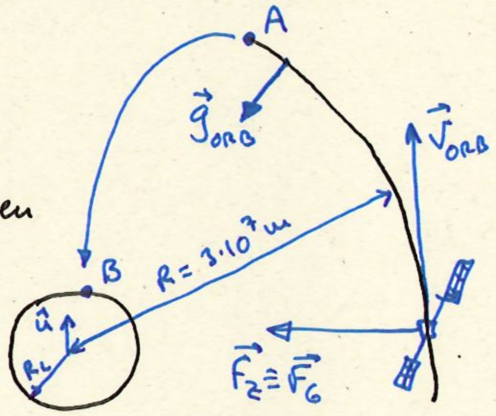
Orain: $v = \omega \cdot R \rightarrow v_B = \frac{2\pi}{T_B} \cdot R_B \rightarrow \boxed{T_B = \frac{2\pi R_B}{v_B} = \frac{2\pi \cdot 4'5 \cdot 10^7}{5193'88} = 54437'8\,s}$

2020-6-A2

A2.- Satelite bat (m = 2.500 kg) Lurraren inguruan biratzen ari da $3\cdot10^4$ km-ko erradioa duen orbita zirkular batean.

a) Zer balio du grabitateak orbita horretan?
b) Zer balio du satelitearen abiadura angeluarrak?
c) Dena delakoagatik satelitearen abiadura ezeztatuko balitz, satelitea Lurrerantz erortzen hasiko litzateke. Zer abiadurarekin helduko litzateke Lurraren gainazalera?

Datuak:
Grabitazio unibertsalaren konstantea, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$
Lurraren erradioa: $R_L = 6{,}37\cdot10^6$ m; Lurraren masa: $M_L = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg



a) Eskatzen deuskuena Eremu Grabitatorioaren Intentsitate bektorea da, beraz bere formula aplikatuz:

$$\boxed{\vec{g}_{ORB}} = -G\frac{M_L}{R^2}\hat{u} = -6'67\cdot10^{-11}\frac{5'97\cdot10^{24}}{(3\cdot10^7)^2}\hat{u} =$$

$$= \boxed{-0'445\,\hat{u}\,\frac{N}{kg}}$$

b) Abiadura angeluarra kalkulatzeko, satelitearen gainean eragiten dauan indar bakarra grabitatorioa danez, eta sateliteak orbita zirkularrak betetzen dauzanez, indar grabitatorioa eta zentripetua berdinduko doguz: $\vec{F}_G \equiv \vec{F}_Z$ → moduluakaz: $F_G = F_Z$ →

$$\rightarrow G\frac{M_L\cdot m}{R^2} = m\frac{v_{ORB}^2}{R} \xrightarrow{v_{ORB}=\omega\cdot R} G\frac{M_L}{R} = \omega^2\cdot R^2 \rightarrow \omega = \sqrt{G\frac{M_L}{R^3}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\omega} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{5'97\cdot10^{24}}{(3\cdot10^7)^3}} = \boxed{1'22\cdot10^{-4}\ rad/s}$$

c) Eremu Grabitatorioa kontserbakorra danez: $E_{mB} = E_{mA} \xrightarrow{V_A = v' = 0}$

$$\rightarrow E_{ZB} + E_{PB} = E_{ZA} + E_{PA} \rightarrow \frac{1}{2}m v_B^2 - G\frac{M_L\cdot m}{R_L} = \frac{1}{2}m v'^2 - G\frac{M_L\cdot m}{R} \rightarrow$$

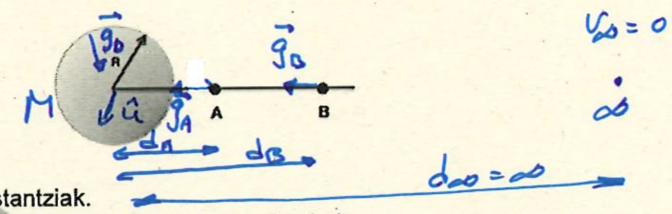
$$\rightarrow \boxed{V_B} = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}v'^2 + G\frac{M_L}{R_L} - G\frac{M_L}{R}\right)} = \sqrt{2\left[\frac{1}{2}\cdot 0 + GM_L\left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R}\right)\right]} =$$

$$= \sqrt{2\left[0 + 6'67\cdot10^{-11}\cdot5'97\cdot10^{24}\left(\frac{1}{6'37\cdot10^6} - \frac{1}{3\cdot10^7}\right)\right]} =$$

$$= \boxed{9923'54\ m/s}$$

2019-7-A-P1

P1.- Grabitatearen intentsitateak R erradioko planeta baten gainazalean g_0 balio du. A puntuan, intentsitate horrek $g_A = g_0/3$ balio du; B puntuan, berriz, $g_B = g_0/5$ balio du.



Kalkulatu:

a) A eta B puntuetatik planetaren zentrorainoko distantziak.
b) A puntuan objektu batek eraman behar duen abiadura minimoa B punturaino hel dadin.
c) A puntuan objektu batek eraman behar duen abiadura minimoa "infinituraino" hel dadin (hain distantzia handia, ezen bertan g delakoa ia-ia nulutzat har daitekeen). Azken kasu horretan, zer abiadura izango du B puntutik igarotzean?

Datuak:
$g_0 = 9{,}8\ m/s^2$, $R = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$

a) Eremu Grabitatoriboaren Intentsitatearen Balioa hau izanik: $\vec{g} = -G\dfrac{M}{d^2}\hat{u}$, eta A eta B puntuetan bere modulua aplikatuz:

$$A \rightarrow g_A = g_0/3 \rightarrow G\frac{M}{d_A^2} = G\frac{M}{R^2 \cdot 3} \rightarrow \boxed{d_A = R\cdot\sqrt{3} = 6'37\cdot10^6\cdot\sqrt{3} = 1'1\cdot10^7 m}$$

$$B \rightarrow g_B = g_0/5 \rightarrow G\frac{M}{d_B^2} = G\frac{M}{R^2 \cdot 5} \rightarrow \boxed{d_B = R\cdot\sqrt{5} = 6'37\cdot10^6\sqrt{5} = 1'4\cdot10^7 m}$$

b) Eremu Grabitatorioa zentrala denez, energia mekanikoaren kontserbazioa aplikatuz:

$$E_{mA} = E_{mB}\ ;\ E_{ZA} + E_{PA} = E_{ZB} + E_{PB}\ ;\ \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{d_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{d_B} \xrightarrow{v_B = 0}$$

$$\rightarrow v_A = \sqrt{2\cdot GM\cdot\left(\frac{1}{d_A} - \frac{1}{d_B}\right)}\ \ (*)$$

Momentu honetara heldute GM-ren balioa kalkulatu behar dogu. Horretarako planetaren gainazalean dagoan g_0-ren balioaz baliatuz:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2} \rightarrow GM = g_0\cdot R^2 = 9'8\cdot(6'37\cdot10^6)^2 = 3'98\cdot10^{14}$$

$*$ batez izendaturiko ekuazioa itzuliz:

$$\boxed{v_A} = \sqrt{2\cdot 3'98\cdot10^{14}\cdot\left(\frac{1}{1'1\cdot10^7} - \frac{1}{1'4\cdot10^7}\right)} = \boxed{3.936'115\ m/s}$$

c) Infinituraino helduko han daukan abiadura zero da ($v_\infty = 0\ m/s$). Barriro Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuz,

$$E'_{mA} = E_{m\infty}\ ;\ \frac{1}{2}mv_A'^2 - G\frac{Mm}{d_A} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{Mm}{d_\infty} \xrightarrow[d_\infty = \infty]{v_\infty = 0}$$

$$\rightarrow \boxed{v_A'} = \sqrt{2\frac{GM}{d_A}} = \sqrt{2\cdot\frac{3'98\cdot10^{14}}{1'1\cdot10^7}} = \boxed{8506'68\ m/s}$$

B puntutik pasatzean daukan abiadura (v_B') kalkulatzeko, berriro Em-ren kontserbazioa aplikatuko dogu:

$$E'_{mB} = E'_{mA}\ ;\ \frac{1}{2}mv_B'^2 - G\frac{Mm}{d_B} = \frac{1}{2}mv_A'^2 - G\frac{Mm}{d_A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v_B'} = \sqrt{2\cdot\left[GM\left(\frac{1}{d_B} - \frac{1}{d_A}\right) + \frac{v_A'^2}{2}\right]} = \sqrt{2\cdot\left[3'98\cdot10^{14}\left(\frac{1}{1'4\cdot10^7} - \frac{1}{1'1\cdot10^7}\right) + \frac{8506'68^2}{2}\right]} =$$

$$= \boxed{7540'36\ m/s}$$

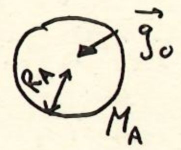
2019-6-B-P1

P1.- Artizar planetak $4{,}87\cdot10^{24}$ kg-ko masa du, eta Eguzkiaren inguruan biraka ari da 108 milioi kilometroko erradioko orbita zirkular batean.

a) Artizarreko gainazalean grabitatearen azelerazioak $8{,}87\ m\cdot s^{-2}$ balio duela jakinik, kalkula ezazu planetaren diametroa (km-tan adierazi behar duzu).
b) Zer balio du Artizarraren orbita-abiadurak?
c) Zenbat denbora behar du Artizarrak bira oso bat egiteko Eguzkiaren inguruan?

Datuak:
Eguzkiaren masa: $M = 2\cdot10^{30}$ kg;
Grabitazio Unibertsalaren konstantea: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

a) Artizarreko gainazalean eremu grabitatorioaren intentsitatea hartuz:

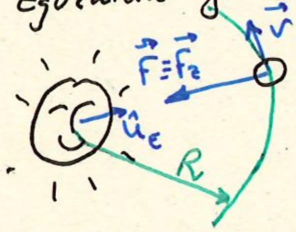


$$\vec{g}_0 = -G\frac{M_A}{R_A^2}\hat{u}_A \ ; \text{ modulua hartuz} \rightarrow$$

$$\rightarrow g_0 = G\frac{M_A}{R_A^2} \rightarrow R_A = \sqrt{G\frac{M_A}{g_0}} = \sqrt{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot4'87\cdot10^{24}}{8'87}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_A = 6'052\cdot10^6\ m \rightarrow \boxed{\text{Diametroa} = 2\cdot R_A = 1'21\cdot10^7\ m = 1'21\cdot10^4\ Km}$$

b) Eguzkiarekiko Artizarraren orbita-abiadura kalkulatzeko Eguzkiak egiten deutsan indar grabitatorioa eta indar zentripetua berdinduko doguz: $\vec{F} \equiv \vec{F}_z$; moduluak hartuz:



$$F = F_z \rightarrow G\frac{M_E\cdot M_A}{R^2} = M_A\cdot\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_E}{R}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{2\cdot10^{30}}{1'08\cdot10^{11}}} = 3'514\cdot10^4\ m/s}$$

c) Artizarraren abiadura-orbitala (abiadura lineala dana) eta Eguzkiaren inguruan daukan abiadura angeluarra erlazionatuz:

$$v = \omega\cdot R$$

Kontutan hartuta bebai:
- Nahiz eta orbita eliptikoa izan, bere batazbesteko erradioa 108 milioi kilometrokoa da.
- Abiadura angeluarra konstantea dala bebai pentsatuko dogu, holan $\omega = \frac{2\pi}{T}$; non T orbita osatzeko periodoa dan.

Holan:

$$v = \frac{2\pi}{T}\cdot R \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{v}\cdot R = \frac{2\pi}{3'514\cdot10^4}\cdot1'08\cdot10^{11} = 1'9308\cdot10^7\ s}$$

Egunetan:

$$T = 1'9308\cdot10^7\ s\cdot\frac{1\ egun}{3600\cdot24\ s} = 223'5\ egun$$

2018-7-B-P1

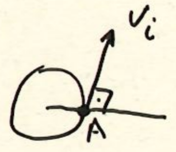
P1.- Planeta jakin baten gainazaletik espazio-zunda bat jaurti da bertikalki gorantz 20 km/s-ko abiaduran.

a) Zer balio du planeta horretan ihes-abiadurak? Lortuko al du espazio-zundak planetaren grabitazio-erakarpenetik ihes egitea?

b) Jaurtitze-unean espazio-zundaren energia zinetikoa 10^{12} J dela jakinik, kalkulatu zer balio duen zundaren masak eta zer erakarpen-indar eragiten dion planetak une horretan.

c) Planetaren gainazaletik neurtuta 600 km-ko altueran dagoela, kalkulatu zer balio duten zundaren pisuak eta abiadurak.

Datuak: planetaren masa: $M = 2{,}5\cdot10^{25}$ kg; planetaren erradioa: $R = 6.371$ km; grabitazio unibertsalaren konstantea: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$



a) Definizioz ihes-abiadurak erradioarekiko norabide perpendikularra dauka. Abiadura horregaz gorputza infinitoraino abiadura nuluagaz helduko da. Holan, Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuz: $Em_A = Em_\infty$; $\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{Mm}{d_\infty} \xrightarrow[d_\infty=\infty]{v_\infty=0}$

$$\rightarrow \boxed{v_i = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2\cdot 6'67\cdot10^{-11}\frac{2'5\cdot10^{25}}{6'371\cdot10^6}} = 2'28\cdot10^4\ m/s}$$

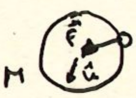
Nahiz eta norabide erradialetik zunda jaurtiki, egin daikeguzan kalkuluak berdinak direnez, bere abiadura v_i-gaz alderatuko dogu.

$$v_{ZUNDA} = 20\frac{km}{s}\cdot\frac{1000\,m}{1\,km} = 20000\frac{m}{s} = 2\cdot10^4\ m/s < 2'28\cdot10^4\ m/s \Rightarrow$$

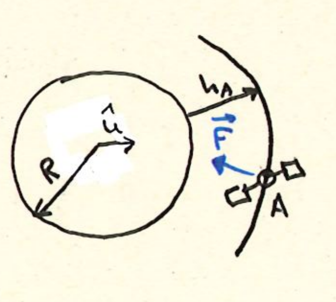
$\Rightarrow$ Bere abiadura ihes-abiadura baino txikiagoa danez, EZ DA HELDUKO.

b) Energia zinetikoaren formulatik: $E_z = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \boxed{m = \frac{2E_z}{v^2} = \frac{2\cdot10^{12}}{(2\cdot10^4)^2} = 5000\ kg}$

Grabitazio Unibertsalaren legea aplikatuz:



$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{u} = -6'67\cdot10^{-11}\frac{2'5\cdot10^{25}\cdot5000}{(6'371\cdot10^6)^2}\hat{u} = -2'05\cdot10^5\,\hat{u}\ N}$$



c) Pisua kalkulatzeko barriro Grabitazio Unibertsalaren legea aplikatuko dogu:

$$\boxed{\vec{F}_A} = -G\frac{Mm}{d_A^2}\hat{u} = -G\frac{Mm}{(R+h_A)^2}\hat{u} =$$

$$= -\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot2'5\cdot10^{25}\cdot5\cdot10^3}{(6'371\cdot10^6+6\cdot10^5)^2}\hat{u} = \boxed{-1'72\cdot10^5\,\hat{u}\ N}$$

Abiadura kalkulatzeko Energiaren kontserbazioa aplikatuz: $Em_A = Em_R \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{d_A} = \frac{1}{2}mv_R^2 - G\frac{Mm}{R} \rightarrow v_A = \sqrt{2\cdot\left[GM\left(\frac{1}{d_A}-\frac{1}{R}\right)+\frac{v_R^2}{2}\right]} \rightarrow$$

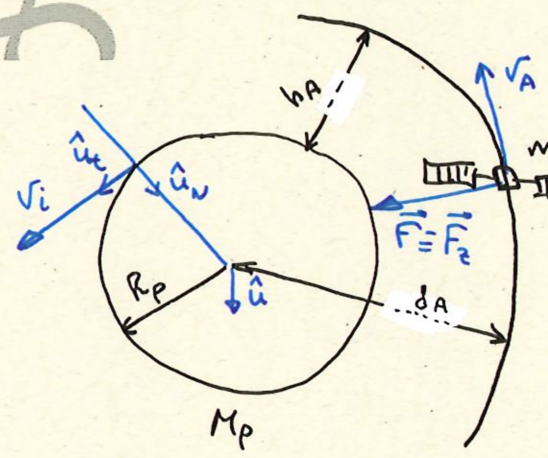
$$\rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2\cdot\left[6'67\cdot10^{-11}\cdot2'5\cdot10^{25}\left(\frac{1}{6'971\cdot10^6}-\frac{1}{6'371\cdot10^6}\right)+\frac{(2\cdot10^4)^2}{2}\right]} = 1'89\cdot10^4\ m/s}$$

2018-6-B-P1

P1.- 25.000 kg-ko masa duen satelite bat orbita zirkularra deskribatzen ari da P planeta jakin baten inguruan, gainazaletik $2{,}41\cdot10^6$ km-ra.

a) Kalkulatu satelitearen periodo orbitala.
b) Kalkulatu satelitearen energia osoa.
c) Kalkulatu ihes-abiaduraren balioa P planetako gainazalaren edozein puntutan.

Datuak: P planetaren masa, $M_P = 6{,}0\cdot10^{27}$ kg; P planetaren erradioa, $R_P = 7.200$ km;
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²



a) Periodo orbitala kalkulatzeko abiadura orbitala kalkulatu behar dogu. Horretarako indar grabitatorioa eta zentripetua berdinduz: $\vec F \equiv \vec F_z$

Euren moduluak hartuz:

$$G\frac{M_P m}{d_A^2} = m\frac{v_A^2}{d_A} \rightarrow v_A=\sqrt{G\frac{M_P}{d_A}} \rightarrow$$

$$\boxed{d_A} = R_P + h_A = 7'2\cdot10^6 + 2'41\cdot10^9 = \boxed{2'42\cdot10^9\ m}$$

$$\rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{27}}{2'42\cdot10^9}} = 1'29\cdot10^4\ m/s}$$

Orain, orbita zirkularra eta periodikoa izanik (abiadura angeluar konstantea) eta abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz:

$$v = \omega\cdot R \rightarrow v_A = \frac{2\pi}{T_A}\cdot d_A \rightarrow \boxed{T_A = \frac{2\pi\cdot d_A}{v_A} = \frac{2\pi\cdot 2'42\cdot10^9}{1'29\cdot10^4} = 1'18\cdot10^6\ s}$$

b) Satelitearen Energia Mekanikoa: $E_{m_A} = E_{z_A} + E_{p_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{M_P\cdot m}{d_A} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{E_{m_A} = \frac{1}{2}\, 2'5\cdot10^4\cdot(1'29\cdot10^4)^2 - 6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{27}\cdot 2'5\cdot10^4}{2'42\cdot10^9} = -2'05\cdot10^{12}\ J}$$

c) Ihes abiaduraren bitartez objektu bat infinituraino bialdu daiteke, haraino heltzen deneko abiadura zero izanik. Holan Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuz:

$$E_{m_R} = E_{m_\infty};\ E_{z_R}+E_{p_R} = E_{z_\infty}+E_{p_\infty};\ \frac{1}{2} m v_{i_R}^2 - G\frac{M_P m}{R} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 - G\frac{M_P m}{d_\infty} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[d_\infty=\infty]{v_\infty=0} v_{i_R} = \sqrt{2\frac{G\cdot M_P}{R}} = \sqrt{\frac{2\cdot6'67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{27}}{7'2\cdot10^6}} = 3'33\cdot10^5\ m/s$$

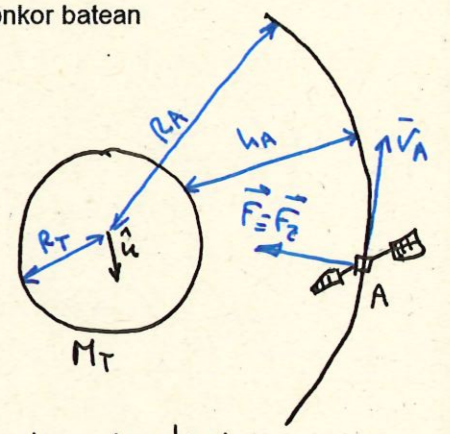
Era bektorialean adierazita: $\boxed{\vec v_{i_R} = 3'33\cdot10^5\ \hat u_t\ m/s}$

2017-7-B-P2

P2.- Satelite artifizial bat orbita bat deskribatzen ari da Lurraren plano ekuatorialean, 3.073 m/s-ko abiadurarekin.

a) Lurraren gainazaletik zer altueratan orbitatzen ari da?
b) Kalkulatu errotazio-periodoa ordutan.
c) Kalkulatu zer balio duen grabitatearen azelerazioak orbita geoegonkor batean higitzen ari den satelite baten kasurako.

Datuak: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot10^6\ m$; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}\ kg$



a) Orbitaren altuera kalkulatzeko abiadura orbitalaren formula erabiliko dogu. Formula hori kalkulatzeko indar grabitatorioa eta indar zentripetua berdinduko doguz.
$\vec{F} = \vec{F}_z$. Euren moduluak berdinduz: $F = F_z$
F-ren balioa Grabitazio Unibertsalaren legeak emoten deusku:

$$G\frac{M_T\cdot m}{R_A^2} = m\frac{v_A^2}{R_A} \rightarrow v_A = \sqrt{G\frac{M_T}{R_A}} \quad (1)$$

Kasu honetan R_A behar dogunez: $R_A = \frac{GM_T}{v_A^2} = \frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'98\cdot10^{24}}{(3'073\cdot10^3)^2} = 4'22\cdot10^7 m$

Holan: $\boxed{h_A = R_A - R_T = 4'22\cdot10^7 - 6'37\cdot10^6 = 3'59\cdot10^7 m}$ (35867'86 km)

b) Orbita periodikoak izanik eta zirkularrak direla suposaturik, abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuko doguz:

$$(2)\ v = \omega\cdot R \rightarrow v_A = \frac{2\pi}{T_A}\cdot R_A \rightarrow T_A = \frac{2\pi}{v_A}\cdot R_A = \frac{2\pi\cdot4'22\cdot10^7}{3'073\cdot10^3} = 86283'89 s$$

$$\boxed{T_A = 86283'89 s\cdot\frac{1h}{3600 s} = 23'96 h}$$

c) Gure ohiko parametroen arabera orbita geoegonkor baten periodoa 24h-koa da. Aurreko ataletako periodoa ez danez zehazki hori, orbita geoegonkorraren altuera zehatza kalkulatuko dogu. Horretarako abiadura orbitalaren formula (1) erabiliko dogu, eta baita be abiadura lineala eta angeluarra erlazionatzen dauzan formula (2):

$$\left.\begin{aligned} v_G &= \sqrt{G\frac{M_T}{R_G}} \\ v_G &= \frac{2\pi}{T_G}\cdot R_G \end{aligned}\right\} (=) \rightarrow \frac{2\pi}{T_G}\cdot R_G = \sqrt{G\frac{M_T}{R_G}} \rightarrow \frac{4\pi^2}{T_G^2}R_G^2 = G\frac{M_T}{R_G} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_G = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M_T\cdot T_G^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'98\cdot10^{24}\cdot(3600\cdot24)^2}{4\cdot\pi^2}} = 4'225\cdot10^7 m$$

Holan $\boxed{\vec{g}_G = -G\frac{M_T}{R_G^2}\hat{u} = -6'67\cdot10^{-11}\frac{5'98\cdot10^{24}}{(4'225\cdot10^7)^2}\hat{u} = -0'223\hat{u}\ \frac{m}{s^2}}$

2017-6-A-P1:

P1. Nazioarteko Espazio Estazioa (ISS) Lurreko gainazalaren gainean orbitatzen ari da, 340 km-ko batez besteko altueran.

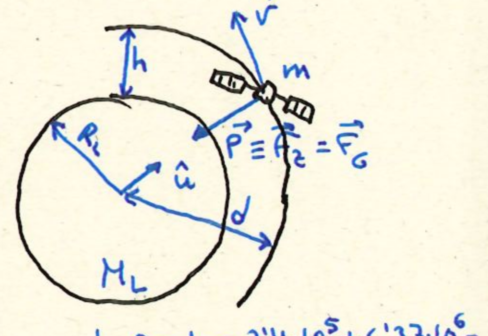
a) Kalkulatu ISSaren orbitaren abiadura eta periodoa.

b) Kalkulatu zer pisu eta zer energia mekaniko dituen ISSak bere orbitan.

c) Lurraren eta Ilargiaren arteko distantzia 380.000 km izanik, kalkulatu zenbat denbora behar duen Ilargiak bira oso bat emateko Lurraren inguruan.

Grabitazio unibertsalaren konstantea: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$; ISSaren masa = 420.000 kg

Lurraren erradioa, R_L = 6.370 km; Lurraren masa, $M_L = 6\cdot10^{24}$ kg



$d = R_L + h = 3'4\cdot10^5 + 6'37\cdot10^6 = 6'71\cdot10^6\ m$

a) Grabitazio Unibertsalaren legearen indar grabitatorioa eta indar zentripetua identifikatuz eta berdinduz:

$\vec{F}_G \equiv \vec{F}_z$; moduluak berdinduz →

→ $F_G = F_z$; $G\frac{M_L \cdot m}{d^2} = m\frac{v^2}{d}$ →

→ $\boxed{v = \sqrt{G\frac{M_L}{d}} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{6'71\cdot10^6}} = 7722'84\ m/s}$

Orbita zirkularra dala suposaturik eta abiadura angeluarra konstantea izanik, higidura periodikoa dalako, abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz: $v = \omega\cdot R$; $v = \frac{2\pi}{T}\cdot d$; $\boxed{T = \frac{2\pi}{v}\cdot d = \frac{2\cdot\pi}{7722'84}\cdot 6'71\cdot10^6 = 5459'2\ s}$

b) Pisua Lurrak egiten deutsan indar grabitatorioa danez, Grabitazio Unibertsalaren legea aplikatuz, eta grafikan adierazita dagoan lez:

$$\boxed{\vec{P} = -G\frac{M_L\cdot m}{d^2}\hat{u} = -6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}\cdot4'2\cdot10^5}{(6'71\cdot10^6)^2}\hat{u} = -3'73\cdot10^6\,\hat{u}\ N}$$

Energia Mekanikoaren formula aplikatuz:

$$E_m = E_z + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_L\cdot m}{d} = \frac{1}{2}4'2\cdot10^5\cdot7722'84^2 - 6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}\cdot4'2\cdot10^5}{6'71\cdot10^6} =$$

$$= -1'25\cdot10^{13}\ J$$

c) Lehen atalean egindako bideari jarraituz:

$$v_I = v_{ILARGIA} = \sqrt{G\frac{M_L}{d_{LI}}} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{3'8\cdot10^8}} = 1026'23\ m/s$$

Orain $v = \omega\cdot R$ aplikatuz:

$$v_I = \frac{2\pi}{T_I}\cdot d_{IL} \rightarrow \boxed{T_I = \frac{2\cdot\pi}{v_I}\cdot d_{LI} = \frac{2\cdot\pi\cdot3'8\cdot10^8}{1026'23} = 2'32\cdot10^6\ s}$$

Egunetan: $\boxed{T_I = 2'32\cdot10^6\ s\cdot\frac{1\ egun}{3600\cdot24\ s} = 26'93\ egun}$

2016-7-A-P1:

P1. Lurreko gainazalean dagoen jaurtigai bat dugu (m = 1.000 kg):

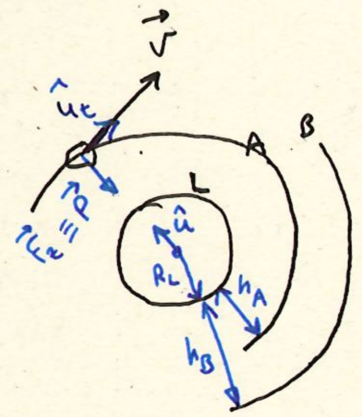
a) Zer abiadurarekin jaurti beharko da jaurtigaia, bertikalki gorantz, $h = R_L$ altueraraino heltzea nahi badugu? (Atmosferako marruskadura baztergarria dela jotzen da).

b) Kalkulatu zer pisu izango duen jaurtigaiak altuera horretan eta zer abiadura tangentzial beharko duen orbita zirkular bat deskribatzeko aipaturiko altueran (R_L).

c) Zer energia kantitate beharko da jaurtigaia $h=R_L$ altuerako orbita zirkularretik $h = 2R_L$ altuerako beste orbita zirkular batera transferitzeko?

Grabitazio unibertsalaren konstantea: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²/kg²

Lurraren erradioa, R_L = 6.370 km; Lurraren masa, $M_L = 6\cdot10^{24}$ kg



a) Eremu Grabitatorioa kontserbakorra danez, Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuko dogu:

$$E_{m_L} = E_{m_A} \;;\; \frac{1}{2} m v_L^2 - G\frac{M_L m}{R_L} = \frac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{M_L m}{d_A} \;;$$

$d_A = R_L + h_A = 2R_L = 1'274\cdot10^7$ m

$d_B = R_L + h_B = 3R_L = 1'911\cdot10^7$ m

A altueraraino eroatea gura dogunez, hango abiadura zerotzat hartuko dogu; holan:

$$\boxed{v_L} = \sqrt{2\cdot G M_L\left(\frac{1}{R_L}-\frac{1}{d_A}\right)} = \sqrt{2\cdot 6'67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}\cdot\left(\frac{1}{6'37\cdot10^6}-\frac{1}{1'274\cdot10^7}\right)} = \boxed{7'93\cdot10^3 \text{ m/s}}$$

b) Pisua kalkulatzea Grabitazio Unibertsalaren legearen erakarpen grabitatorioa kalkulatzea da:

$$\boxed{\vec P} = -G\frac{M_L\cdot m}{d_A^2}\hat u = -6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}\cdot10^3}{(1'274\cdot10^7)^2}\hat u = \boxed{-2'47\cdot10^3\,\hat u \text{ N}}$$

Orbita zirkularrean egonda pisua jaurtigaiaren gainean agertzen dan indar zentripetua da; bi indarrak berdinduz:

$$\vec F_z \equiv \vec P \;;\; \text{moduluakaz: } m\frac{v^2}{d_A} = 2'47\cdot10^3 \to v = \sqrt{\frac{2'47\cdot10^3\cdot1'274\cdot10^7}{1\cdot10^3}} = 5'6\cdot10^3 \text{ m/s}$$

Era bektorialean adierazita: $\boxed{\vec v = 5'6\cdot10^3\,\hat u_t \text{ m/s}}$

c) B altueran daukan abiadura orbitala kalkulatzeko, bertako indar grabitatorioa eta zentripetua berdinduz, $\vec F_G \equiv \vec F_z$, eta moduluak hartuz:

$$G\frac{M_L\cdot m}{d_B^2} = m\frac{v_B^2}{d_B} \to v_B = \sqrt{G\frac{M_L}{d_B}} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{1'911\cdot10^7}} = 4576'23 \text{ m/s}$$

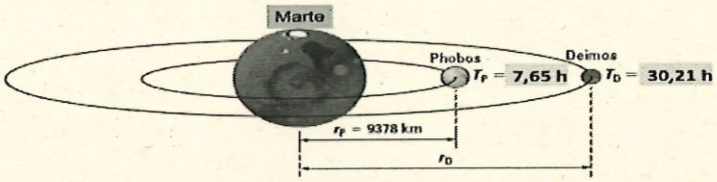
A tik Bra eroateko lana bi orbitetako energia mekanikoen diferentzia da:

$$\boxed{W} = E_{m_B} - E_{m_A} = E_{pB} + E_{zB} - E_{pA} - E_{zA} = -G\frac{M_L\cdot m}{d_B} + \frac{1}{2} m v_B^2 + G\frac{M_L\cdot m}{d_A} - \frac{1}{2} m v_A^2 =$$

$$= -6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}\cdot10^3}{1'911\cdot10^7} + \frac{1}{2}10^3\cdot4576'23^2 + 6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}\cdot10^3}{1'274\cdot10^7} - \frac{1}{2}10^3\cdot5604'72^2 = \boxed{5'24\cdot10^9 \text{ J}}$$

2015-6-A-P1:

A1. Martek bi ilargi (satelite naturalak) ditu: Deimos eta Fobos (ikus irudia). Fobosen orbitaren erradioa 9.378 km da, eta 7,65 h-ko periodoa du. Deimosen orbitaren periodoa, aldiz, 30,21 h da.



a) Aplikatu Keplerren 3. legea, eta kalkulatu Deimosen orbitaren erradioa.
b) Bi satelite horietatik, zein mugitzen da arinago? Kalkulatu bien abiaduren arteko erlazioa.
c) Irudian adierazitako posizioan, kalkulatu zer indar grabitatorio (modulua, norabidea eta noranzkoa) jasaten ari den Fobos satelitea:
c1) Martek eraginda; c2) Deimosek eraginda.

Datuak: Grabitazio unibertsalaren konstantea: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$
Marte, $m = 6{,}42\cdot10^{23}$ kg; Fobos, $m = 1{,}07\cdot10^{16}$ kg;
Deimos, $m = 2{,}24\cdot10^{15}$ kg

a) Keplerren 3. legeak orbitaren erradioa eta periodoa erlazionatzen dau. Horretarako indar grabitatorioa eta zentripetua identifikatzen dira eta abiadura lineal eta angeluararen arteko erlazioa erabiltzen da:

$\vec{F_Z} = \vec{F_G} \to$ moduluak: $F_G = F_Z$; $G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \to v^2 = G\frac{M}{R} \iff \boxed{R^3 = \frac{GM}{4\pi^2}\cdot T^2}$

$v = \omega\cdot R$; $v = \frac{2\pi}{T}\cdot R \to v^2 = \frac{4\pi^2\cdot R^2}{T^2}$ M= Marteren masa

Deimosen kasuan $T_D = 30'21h\cdot\frac{3600s}{1h} = 108756s$

Beraz: $\boxed{R_D = \sqrt[3]{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot6'42\cdot10^{23}\cdot108756^2}{4\cdot\pi^2}}} = \sqrt[3]{1'28\cdot10^{22}} = \boxed{2'341\cdot10^7\ m}$

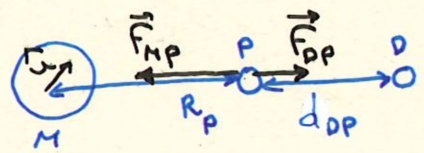
b) Phobos, orbita baxuagoan egonda, arinago mugitzen da. Abiadurak:

Phobos $\to v_P = \sqrt{G\frac{M}{R_P}} = 2136'85\ m/s$

Deimos $\to v_D = \sqrt{G\frac{M}{R_D}} = 1036'48\ m/s$

$\frac{v_P}{v_D} = 2'06 \to \boxed{v_P = 2'06\ v_D}$

c) Grabitazio Unibertsalaren legea aplikatuz:



$d_{DP} = R_D - R_P = 3'048\cdot10^7\ m$

$\boxed{\vec{F_{MP}}} = -G\frac{Mm_P}{R_P^2}\hat{u} = -6'67\cdot10^{-11}\frac{6'42\cdot10^{23}\cdot1'07\cdot10^{16}}{(9'378\cdot10^6)^2}\hat{u} =$

$= \boxed{-5'21\cdot10^{15}\,\hat{u}\ N}$

$\boxed{\vec{F_{DP}}} = G\frac{m_D\cdot m_P}{d_{DP}^2}\hat{u} = 6'67\cdot10^{-11}\frac{2'24\cdot10^{15}\cdot1'07\cdot10^{16}}{(3'048\cdot10^7)^2}\hat{u} = \boxed{1'72\cdot10^6\,\hat{u}\ N}$

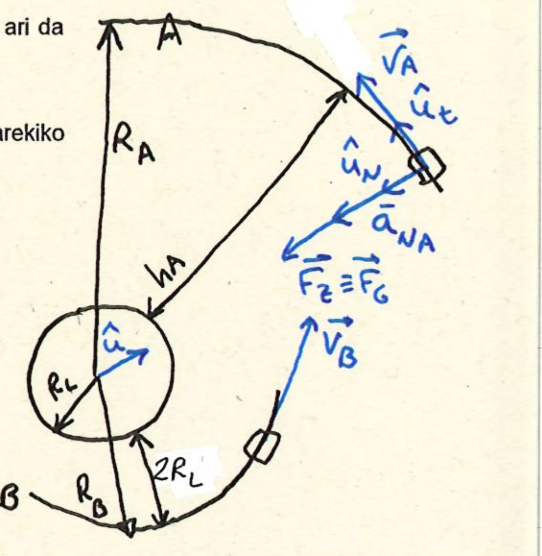
Ikusten danez Deimosek egindakoa baztergarria da Martek egiten dauanagaz alderatuta.

2015-7-B-P1:

P1. 500 kg-ko masa duen satelite artifizial bat orbita zirkularrak deskribatzen ari da Lurraren inguruan gainazaletik 60.660 km-ko altueran.

a) Kalkulatu sateliteare periodoa.
b) Kalkulatu sateliteak bere orbitan duen azelerazioa.
c) Zer periodo izango du baldin eta orbitaren altuera (Lurraren gainazalarekiko neurtuta) Lurraren erradioa halako bi bada?

Datuak: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M_L = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_L = 6.370$ km.



a) A orbitan satelitearen periodoa kalkulatzeko bere abiadura orbitala jakin behar dogu. Horretarako indar grabitatorioa eta indar zentripetua berdinduko doguz:

$\vec{F}_z \equiv \vec{F}_G$; moduluak hartuz: $F_z = F_G \rightarrow$

$$\rightarrow m_s \frac{v^2}{R} = G\frac{M_L \cdot m_s}{R} \rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_L}{R}}$$

Holan A orbitako altueran:

$$\boxed{v_A} = \sqrt{G\frac{M_L}{R_L + h_A}} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5'97\cdot10^{24}}{(6'37+60'66)\cdot10^{6}}} = \boxed{2437'34\ m/s}$$

Abiadura angeluarra konstantea izanik, eta lineala eta angeluarra berdinduz:

$$v = \omega\cdot R \rightarrow v_A = \omega_A\cdot R_A \rightarrow v_A = \frac{2\pi}{T_A}\cdot R_A \rightarrow \boxed{T_A = \frac{2\pi R_A}{v_A} = 172795'97\ s}$$

b) Daukan azelerazioa Lurrak emondako azelerazio normala da:

$$\boxed{\vec{a}_{N_A} = \frac{v_A^2}{R_A}\hat{u}_N = 0'0886\,\hat{u}_N\ m/s^2}$$

c) Lehen atalean garatutakoaren arabera:

$$v_B = \sqrt{G\frac{M_L}{R_L + 2\cdot R_L}} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\,\frac{5'97\cdot10^{24}}{3\cdot6'37\cdot10^{6}}} = 4564'78\ m/s$$

$$\boxed{T_B = \frac{2\pi R_B}{v_B} = \frac{2\pi\cdot3\cdot6'37\cdot10^{6}}{4564'78} = 26303'93\ s}$$

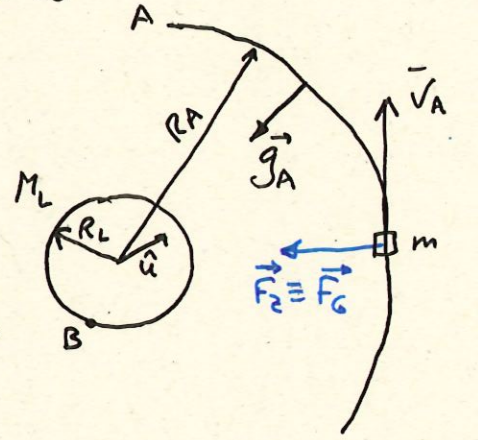
2014-7-A-P1. Satelite bat (m = 2.000 kg) Lurraren inguruan biratzen ari da $2\cdot10^4$ km-ko erradioa duen orbita zirkular batean.

a) Zer balio du grabitateak orbita horretan?

b) Zer balio du satelitearen abiadura angeluarrak?

c) Dena delakoagatik satelitearen abiadura ezeztatuko balitz, satelitea Lurrerantz erortzen hasiko litzateke. Zer abiadurarekin helduko litzateke Lurraren gainazalera?

$G = 6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$; $R_L = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_L = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg



a) A orbitako grabitatea kalkulatzeko zuzenean Eremu Grabitatorioaren Intentsitate bektorearen formula aplikatuko dogu:

$$\vec{g}_A = -G\frac{M_L}{R_A^2}\hat{u} = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5'97\cdot10^{24}}{(2\cdot10^7)^2}\hat{u} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{g}_A = -0'9955\,\hat{u}\ m/s^2}$$

b) Abiadura angeluarra kalkulatzeko abiadura lineala kalkulatu behar da. Horretarako, Grabitazio Unibertsalaren Legetik abiatuta, eta indar zentripetua eta grabitatorioa berdinduz:

$$\vec{F}_Z \equiv \vec{F}_G \rightarrow \text{Moduluak berdinduz} \rightarrow m\frac{v_A^2}{R_A} = G\frac{M_L\cdot m}{R_A^2} \rightarrow v_A = \sqrt{G\frac{M_L}{R_A}}$$

Orain abiadura angeluarra eta lineala berdinduz:

$$v = \omega\cdot R \rightarrow v_A = \omega_A\cdot R_A \rightarrow \omega_A = \frac{v_A}{R_A} = \frac{\sqrt{G\frac{M_L}{R_A}}}{R_A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\omega_A = \sqrt{G\frac{M_L}{R_A^3}} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5'97\cdot10^{24}}{(2\cdot10^7)^3}} = 2'23\cdot10^{-4}\ rad/s}$$

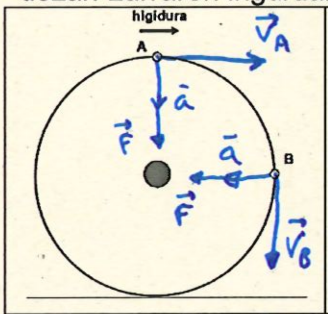
c) Eremua kontserbakorra danez Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuko dogu:

$$E_{MB} = E_{MA} \rightarrow E_{PB} + E_{ZB} = E_{PA} + E_{ZA} \rightarrow -G\frac{M_L\cdot m}{R_B} + \frac{1}{2}m v_B^2 = -G\frac{M_L m}{R_A} + \frac{1}{2}m v_A^2$$

$$\xrightarrow{v_A = 0} v_B = \sqrt{2\cdot G M_L\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)} = \sqrt{2\cdot6'67\cdot10^{-11}\cdot5'97\cdot10^{24}\cdot\left(\frac{1}{6'37\cdot10^6} - \frac{1}{2\cdot10^7}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v_B = 9207'34\ m/s}$$

2014-6-A-P1. Lurraren zentrotik 6500 km-ko distantziara igo da 1200 kg-ko satelite artifizial bat, eta bulkada egokia eman zaio –suziri bultzagileen bidez- orbita zirkularra deskriba dezan Lurraren inguruan.



a) Zer lan egin behar da, gitxienez, satelitea Lurraren gainazaletik altuera horretaraino eramateko?
b) Behin altuera horretara helduta, zer abiadura eman beharko diote suziriek higidura zirkularra gertatzeko?
c) Alboko irudian, satelitearen ibilbidea bere orbita zirkularrean ikus dezakegu. Marraztu itzazu bektore hauek irudiko A eta B puntuetan: satelitearen abiadura, satelitearen azelerazioa eta sateliteari eragindako grabitate-indarra.

$G = 6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$; $R_L = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_L = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg

a) Altuera horretaraino eramateko egin behar dan lana altuera horretaraino igotzeko behar davan energia potentziala da. Lurraren gainazalean energia potentziala daukanez, egin beharreko lana bi energia potentzial horren diferentzia da:

$$\boxed{W} = E_{P_{ORBITAN}} - E_{P_{GAINAZALEAN}} = -G\frac{M_L\cdot m}{R_A} + G\frac{M_L m}{R_L} =$$

$$= G M_L m\left(\frac{1}{R_L}-\frac{1}{R_A}\right) = 6'67\cdot10^{-11}\cdot 5'97\cdot10^{24}\cdot 1200\left(\frac{1}{6'37\cdot10^6}-\frac{1}{6'5\cdot10^6}\right) =$$

$$= \boxed{1'5\cdot10^9 J}$$

b) Eman beharreko abiadura orbitan mantentzekoa da, hau da, abiadura orbitala. Hori kalkulatzeko, Grabitazio Unibertsalaren Legetik abiatuta, eta indar zentripetua eta indar grabitatorioa berdinduz:

$\vec{F_z} \equiv \vec{F} \rightarrow$ Moduluak berdinduz: $F_z = F \rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_L\cdot m}{R^2} \rightarrow$

$$\rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_L}{R}}$$

Buruketako orbitaren erradioa eta Lurraren masagaz:

$$\boxed{v = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{5'97\cdot10^{24}}{6'5\cdot10^6}} = 7826'97\ m/s}$$

2013-7-A-P2. R (erradioa) = 3.200 km duen planeta esferiko batean, grabitatearen azelerazioa (g_0) 6,2 $m\cdot s^{-2}$ da gainazalean.

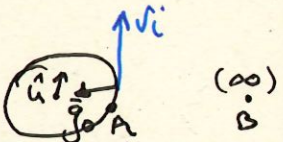
a) Kalkula itzazu planetaren masa eta ihes-abiadura (planetaren gainazaletik).

b) Planetaren gainazaletik zer altueratan, *h*, orbitatu behar du satelite batek orbita zirkularra 24 orduan egiteko?

c) Aukeratu ezazu satelitearen orbitaren edozein puntu, eta marraztu itzazu (modu kualitatiboan) bektore hauek: satelitearen abiadura, satelitearen azelerazioa eta sateliteari eragindako grabitate-indarra.

$G = 6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$;Satelitearen masa = 500 kg

a) Emoten dasen grabitatearen azelerazioa gainazalean, bertako eremu grabitatorioaren intentsitate bektorearen modulua da; beraz bere formulatik abiatuta eta modulua erabiliz:



$$\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\hat{u} \rightarrow g_0 = G\frac{M_p}{R_p^2} \rightarrow M_p = \frac{g_0 R_p^2}{G} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{M_p = \frac{6'2\cdot(3'2\cdot10^6)^2}{6'67\cdot10^{-11}} = 9'52\cdot10^{23}\,kg}$$

(*) Ihes abiadura behean, [illegible]

b) Hau kalkulatzeko abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuko dogu: $v = \omega\cdot R = \frac{2\pi}{T}\cdot R$

Bestaldetik h altueran egoteko behar dauan abiadura lineala kalkulatuko dogu, Grabitazio Unibertsalaren Legetik abiatuta eta indar zentripetua eta grabitatorioa berdinduz: $\vec{F_z} \equiv \vec{F_G} \rightarrow$ Moduluekaz: $F_z = F_G \rightarrow$

$\rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$; Non M planetaren masa dan eta R orbitaren erradioa.

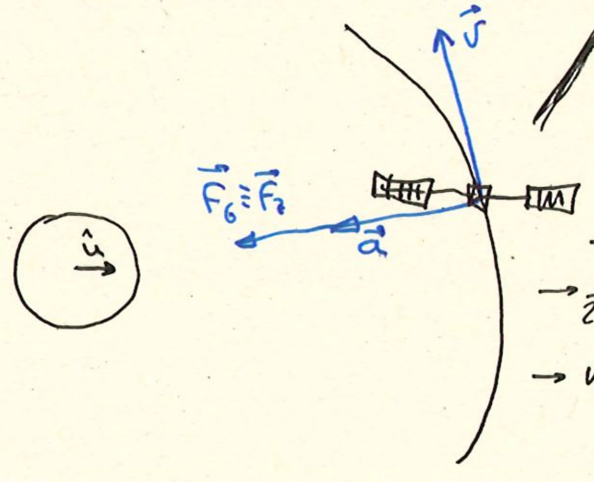
Abiadura orbitalaren bi adierazpideak berdinduz:

$$\frac{2\pi}{T}\cdot R = \sqrt{G\frac{M}{R}} \rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R^2 = G\frac{M}{R} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} \rightarrow$$

T segunduetan adierazita: $T = 24h\cdot\frac{3600s}{1h} = 86400\,s$

$$\rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot9'52\cdot10^{23}\cdot86400^2}{4\pi^2}} = 2'29\cdot10^7\,m$$

Beraz: $\boxed{h = R - R_p = 2'29\cdot10^7 - 3'2\cdot10^6 = 1'969\cdot10^7\,m = 19698\,Km}$



(*) a) Ihes abiadura: erradioarekiko perpendikularki emotekoa eremutik ihes egiteko; infinituraino helduko.

Eremua kontserbakorra danez: $Em_A = Em_B$

$\rightarrow Ez_A + Ep_A = Ez_B + Ep_B \xrightarrow{(v_\infty = 0)}$

$\rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{R_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{R_\infty} \xrightarrow{R_\infty=\infty}$

$$\rightarrow v_A = \boxed{v_{iA}} = \sqrt{2G\frac{M}{R_p}} = \sqrt{\frac{2\cdot6'67\cdot10^{-11}\cdot9'52\cdot10^{23}}{3'2\cdot10^6}} = \boxed{6299'72\,m/s}$$

2013-6-B-P2. 500 kg-ko satelite artifizial bat Lurraren gainazaletik jaurti da, eta $h=R_L/5$ altuerara iritsi da.

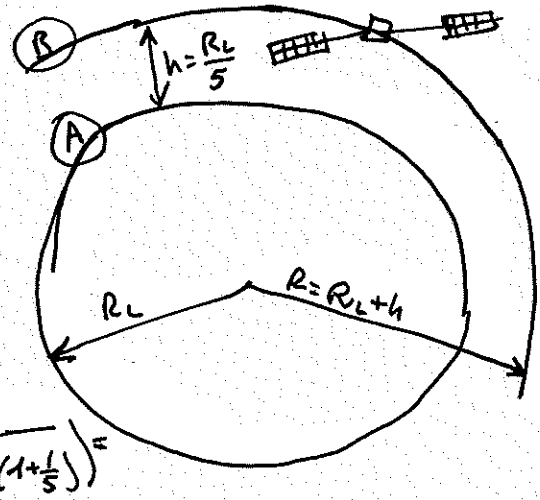
a) Zer lan egin behar da, gutxienez, satelitea altuera horretaraino eramateko?

b) Zer energia gehigarri eman behar zaio sateliteari baldin eta altuera horretan orbita zirkularra egitea nahi badugu?

c) Zer periodo izango du satelite horren mugimenduak?

$G = 6,67\cdot10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$; $M_L = 6\cdot10^{24}$ kg ; $R_L = 6,37\cdot10^6$ m

a) Altuera horretaraino eramateko egin behar dan lana sateliteak behar daran energia potentzialaren emendioa lortzeko beste izan behar da. Beraz:



$$\boxed{W} = E_{pB} - E_{pA} = -G\frac{M_p\cdot m}{R_B} + G\frac{M_p m}{R_A} =$$

$$= G M_p\cdot m\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right) =$$

$$= 6'67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}\cdot 500\left(\frac{1}{6'37\cdot10^6} - \frac{1}{6'37\cdot10^6(1+\frac{1}{5})}\right) =$$

$$= \boxed{5'2354\cdot10^9 \text{ J}}$$

b) Emon beharreko energia gehigarria orbita horretan daukan abiadura orbitalari dagokion energia zinetikoa da.
Holan izanik, Grabitazio Unibertsalaren legetik abiatuta eta indar zentripetua eta grabitatorioa berdinduz abiadura orbitala lortuko dogu:

$\vec{F_z} \equiv \vec{F_G}$; moduluak berdinduz: $F_z = F_G \rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$

Kasu honetan: $v = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{1'2\cdot6'37\cdot10^6}} = 7235'66$ m/s

Beraz: $\boxed{W = E_z = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}500\cdot7235'66^2 = 1'31\cdot10^{10} \text{ J}}$

c) Kalkulatutako abiadura eta abiadura angeluarra erlazionatuz:

$v = \omega\cdot R = \frac{2\pi}{T}\cdot R \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi\cdot R}{v} = \frac{2\pi\cdot1'2\cdot6'37\cdot10^6}{7235'66} = 6.637'77 \text{ s}}$

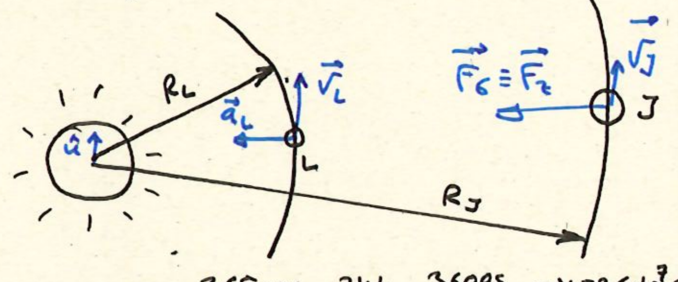
2012-07-A-P1. Urtebete behar du Lurrak Eguzkiaren inguruko bira oso bat emateko, eta 149 milioi km ditu orbita horren batez besteko erradioak. Lurrak Eguzkiaren inguruan egiten duen mugimendua zirkularra dela jota:

a) kalkula ezazu Lurrak zer abiadura eta azelerazio duen bere orbitan.

b) kalkula ezazu Eguzkiaren masa.

c) Jupiter planetaren orbitaren erradioa Lurrarena baino 5,2 aldiz handiagoa dela jakinik, zer periodo dauka Jupiterren orbitak?

Grabitazio unibertsalaren konstantea: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$



a) Emandako datuekaz zuzenean abiadura orbitala eta angeluarra eskuratuko doguz:

$$\boxed{v_L} = \omega\cdot R = \frac{2\pi}{T_L}\cdot R_L =$$

$$= \frac{2\pi}{3'1536\cdot 10^7}\cdot 1'49\cdot 10^{11} = \boxed{29686'54\ m/s}$$

$$T_L = 1\,\text{urte}\cdot\frac{365\,\text{egun}}{1\,\text{urte}}\cdot\frac{24\,h}{1\,\text{egun}}\cdot\frac{3600\,s}{1\,h} = 3'1536\cdot 10^7\,s$$

$$\boxed{\vec{a}_L = -\frac{v_L^2}{R_L}\hat{u} = -\frac{29686'54^2}{1'49\cdot 10^{11}}\hat{u} = -0'0059\,\hat{u}\ m/s^2}$$

b) Lurrak daukan azelerazioa puntu horretan Eguzkiak sortzen dauan Eremu Grabitatorioaren Intentsitate bektorea da, beraz honen definiziotik:

$$\vec{g} = -G\frac{M_E}{d^2}\hat{u} \rightarrow \text{Modulua: } g = G\frac{M_E}{d^2}\ ;$$ Lurraren kasuan eta Eguzkiaren masa bakandu:

$$\boxed{M_E = \frac{a_L\cdot R_L^2}{G} = \frac{0'0059(1'49\cdot 10^{11})^2}{6'67\cdot 10^{-11}} = 1'99\cdot 10^{30}\ Kg}$$

c) Jupiterren abiadura orbitala kalkulatuko dogu. Horretarako Grabitazio Unibertsalaren legetik abiatuta eta indar zentripetua eta grabitatorioa berdinduz: $\vec{F}_z \equiv \vec{F}_G$; moduluakaz: $F_z = F_G \rightarrow m_J\frac{v_J^2}{R_J} = G\frac{M_E\cdot m_J}{R_J^2} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{v_J} = \sqrt{G\frac{M_E}{R_J}} = \sqrt{\frac{6'67\cdot 10^{-11}\ 1'99\cdot 10^{30}}{5'2\cdot 1'49\cdot 10^{11}}} = \boxed{13018'4\ m/s}$$

Abiadura angeluarragaz erlazionatuz:

$$v_J = \omega_J\cdot R_J\ ;\ v_J = \frac{2\pi}{T_J}\cdot R_J \rightarrow \boxed{T_J = \frac{2\pi\cdot 5'2\cdot 1'49\cdot 10^{11}}{13018'4} = 3'7395\cdot 10^8\ s}$$

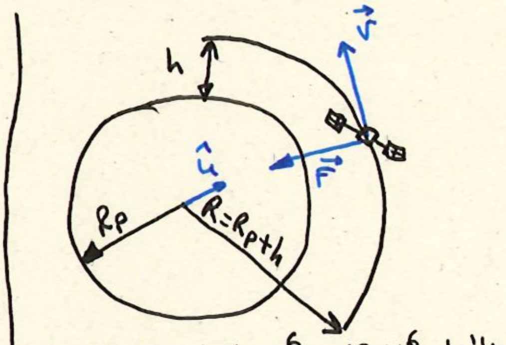
2012-6-A-P1. 250 kg-ko masa duen satelite bat orbita zirkularra egiten ari da planeta esferiko baten gainazaletik 300 km-ko altueran. Ezaugarri hauek ditu planetak: erradioa = 4.100 km; masa = $1{,}81\cdot10^{24}$ kg.

a) Kalkula ezazu sateliteak orbitan duen pisua.

b) Kalkula itzazu satelitearen abiadura eta periodoa.

c) Keplerren 3. legea aplikatuz, kalkula ezazu zer periodo duen beste satelite batek planeta beraren inguruan orbitatzen ari bada gainazaletik 400 km-ko distantziara.

Grabitazio unibertsalaren konstantea: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2$



$R = R_p + h = 4'1\cdot10^6 + 0'3\cdot10^6 = 4'4\cdot10^6\,m$

a) Satelitearen pisua kalkulatzea indar grabitatorioa kalkulatzea da, beraz Grabitazio Unibertsalaren legearen formula aplikatuko dogu:

$$\boxed{\vec{P} = -G\frac{M_p\cdot m_s}{R^2}\hat{u}} =$$

$$= -6'67\cdot10^{-11}\frac{1'81\cdot10^{24}\cdot 250}{(4'4\cdot10^6)^2}\hat{u} = \boxed{-1558'97\,\hat{u}\,N}$$

b) Bere abiadura kalkulatzeko, Grabitazio Unibertsalaren legetik abiatuta, eta indar zentripetua eta grabitatorioa berdinduz: $\vec{F_z} = \vec{F_G}$; Moduluak hartuz: $F_z = F_G \rightarrow m_s\frac{v^2}{R} = G\frac{M_p\, m_s}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_p}{R}} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{1'81\cdot10^{24}}{4'4\cdot10^6}} = 5238'12\,m/s}$$

Abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz, eta higidura periodikoa danez:

$$v = \omega\cdot R\ ;\ v = \frac{2\pi}{T}\cdot R \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{v}\cdot R = 5277'84\,s}$$

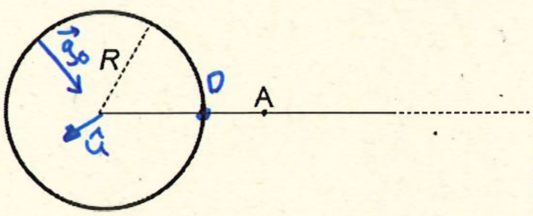
c) Hasteko Keplerren 3. legearen formula lortuko dogu, aurreko ataleko abiaduraren formulak berdinduz:

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{G\frac{M_p}{R}} \\ v &= \frac{2\pi}{T}\cdot R \end{aligned}\right\} (=) \rightarrow \sqrt{G\frac{M_p}{R}} = \frac{2\pi}{T}\cdot R \rightarrow G\frac{M_p}{R} = \frac{4\pi^2\cdot R^2}{T^2} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_p}\cdot R^3$$

Bigarren satelitearen orbitaren erradioa: $R_2 = R_p + h_2 = 4'1\cdot10^6 + 0'4\cdot10^6 = 4'5\cdot10^6\,m$

Holan: $$\boxed{T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\cdot M_p}\cdot R_2^3} = \sqrt{\frac{4\cdot\pi^2\cdot(4'5\cdot10^6)^3}{6'67\cdot10^{-11}\cdot1'81\cdot10^{24}}} = 5458'79\,s}$$

2011-7-A-P1. *R* erradioko planeta baten gainazalean dugun grabitatearen intentsitateak g_0 balio du. Objektu bat distantzia "infinitutik" (non bertan *g* delakoa zein potentzial grabitatorioa praktikoki nulutzat har daitezkeen) askatu eta planetaren gainean libreki erortzen uzten bada, kalkula ezazu:



B (∞)

$\left(v_B = 0 \,;\, E_{Z_B} = 0 \;\; E_{P_B} = 0 \;\; R_B = \infty \right)$

a) planetaren masa,
b) objektuaren abiadura planetaren gainazalera heltzean, eta
c) objektuaren abiadura A puntutik igarotzean, han grabitateak $g_0/3$ balio badu.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$; $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$; $R = 6{,}37 \times 10^6\ m$

a) Planetaren masa kalkulatzeko Eremu Grabitatorioaren Intentsitate Bektorearen definiziotik abiatuko gara: $\vec{g} = -G \frac{M_P}{R^2}\hat{u}$

D puntuan g_0 balioa dauka; modulua hartuz eta ordezkatuz:

$$g_0 = G\frac{M_P}{R_P^2} \rightarrow \boxed{M_P = \frac{g_0 \cdot R_P^2}{G} = \frac{9'8(6'37\cdot10^6)^2}{6'67\cdot10^{-11}} = 5'96\cdot10^{24}\ Kg}$$

b) Eremu Grabitatorioa kontserbakorra danez Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuko dogu: $E_{m_D} = E_{m_B} \rightarrow$

$$\rightarrow E_{Z_D} + E_{P_D} = E_{Z_B} + E_{P_B} \rightarrow \frac{1}{2}mv_D^2 - G\frac{M_P\cdot m}{R_D} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{M_P \cdot m}{R_B} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[V_B=0 \;\; R_D = R_P]{R_B=\infty} \boxed{\boxed{V_D = \sqrt{2\cdot G\frac{M_P}{R_P}}}} = \sqrt{2\cdot 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5'96\cdot10^{24}}{6'37\cdot10^6}} = \boxed{\boxed{11172'01\ m/s}}$$

c) A puntutik planetaren zentruraino dagoan distantzia kalkulatzeko Eremu Grabitatorioaren Intentsitate Bektorearen modulua hartuko dogu barriro: $g_A = g_0/3$; $g_0/3 = G\frac{M_P}{R_A^2} \rightarrow R_A = \sqrt{\frac{3}{g_0}GM_P} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{R_A = \sqrt{\frac{3}{9'8}\cdot 6'67\cdot10^{-11}\cdot 5'96\cdot10^{24}} = 1'103\cdot10^7\ m}$$

Orain barriro Energia Mekanikoaren kontserbazioa aplikatuz:

$$E_{mA} = E_{mB} \rightarrow E_{ZA} + E_{PA} = E_{ZB} + E_{PB} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{M_P\cdot m}{R_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{M\cdot m}{R_B} \xrightarrow[R_A = 1'103\cdot10^7]{V_B = 0;\ R_B=\infty}$$

$$\rightarrow \boxed{\boxed{V_A = \sqrt{2\cdot G\cdot\frac{M_P}{R_A}}}} = \sqrt{2\cdot6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5'96\cdot10^{24}}{1'103\cdot10^7}} = \boxed{\boxed{8489'54\ m/s}}$$

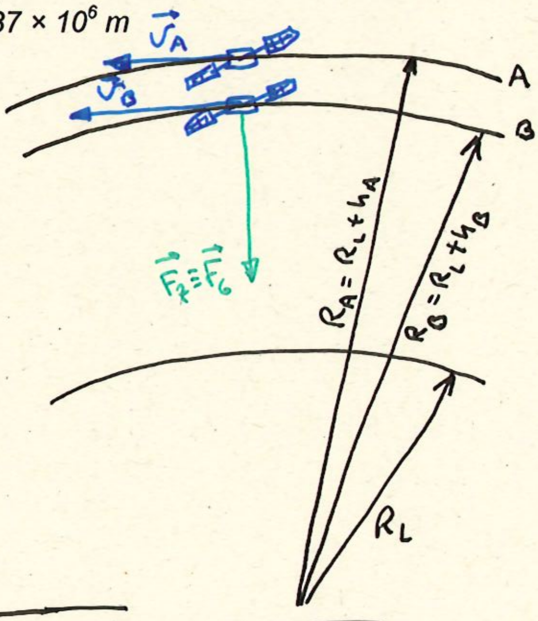
2011-6-A-P1. Nazioarteko Espazio Estazioa (ISS), 280.000 kg-koa, lurrazalarekiko 360 km-ko batezbesteko altitudeko orbita zirkularrean biraka ari da Lurraren inguruan. Atmosfera garaiarekin duen marruskaduragatik, haren altitudea jaisten ari da etengabe eta, ondorioz, orbitaren zuzenketa periodiko baten beharra dago. Eman dezagun ezen, esandakoarengatik, espazio-estazioa 340 km-ko altitudeko orbitara jaitsi dela. Kalkulatu:

a) 340 km-ko altitudeko eta 360 km-ko altitudeko orbitetan espazio-estazioak dituen abiadura orbitalak,

b) orbita altuena berreskuratzeko behar den energia, eta

c) biraketa-periodoan gertatu den aldaketa.

$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m²/kg² ; $M_L = 5,99 \times 10^{24}$ kg ; $R_L = 6,37 \times 10^6$ m



Datuak osotuz:

$R_A = R_L + h_A = 6'37\cdot10^6 + 3'6\cdot10^5 = 6'73\cdot10^6$ m

$R_B = R_L + h_B = 6'37\cdot10^6 + 3'4\cdot10^5 = 6'71\cdot10^6$ m

a) Abiadura orbitalak kalkulatzeko Grabitazio Unibertsalaren Legearen formulatik abiatuz eta indar zentripetua eta grabitatorioa berdinduz: $\vec{F}_z \equiv \vec{F}_G$

Moduluak hartuz: $F_z = F_G \rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow$

$\rightarrow$ Abiadura orbitala: $v = \sqrt{G\frac{M_L}{R}}$

Holan:

- 360 km-ko altueako orbitan: $\boxed{v_A} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{5'99\cdot10^{24}}{6'73\cdot10^6}} = \boxed{7704'93 \text{ m/s}}$
- 340 km-ko altueako orbitan: $\boxed{v_B} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{5'99\cdot10^{24}}{6'71\cdot10^6}} = \boxed{7716'41 \text{ m/s}}$

b) Orbita berreskuratzeko energia (motoreek egin behar dabena) bi orbiten artean dagoan energia mekanikoaren diferentzia da:

$$\boxed{W} = E_{pA} - E_{pB} = -G\frac{M_L\cdot m}{R_A} - \left(-G\frac{M_L m}{R_B}\right) = GM_L m\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right) =$$

$$= 6'67\cdot10^{-11}\cdot 5'99\cdot10^{24}\cdot 2'8\cdot10^5\left(\frac{1}{6'71\cdot10^6} - \frac{1}{6'73\cdot10^6}\right) = \boxed{4'95\cdot10^{10} \text{ J}}$$

Horrez gain abiadura orbitala finkatzeko kalkuluak eta horren osteko energia gastua egin beharko da, bai abiadura handitzeko edo murrizteko. Atmosferarekiko dagoan marruskaduragaitik eta datu zehatz gehiagorik ez dagoanez, kalkulu hori orain egitea ezin da.

c) Biraketa periodoak kalkulatzeko abiadura orbitala eta angeluarra erlazionatuko doguz; kontuan izanik be orbitak zirkularrak suposatzen dirala eta periodikoak dirala:

$$v = \omega\cdot R = \frac{2\pi}{T}\cdot R \rightarrow T = \frac{2\pi}{v}\cdot R$$

$$\boxed{T_A} = \frac{2\cdot\pi\cdot R_A}{v_A} = \frac{2\cdot\pi\cdot 6'73\cdot10^6}{7704'93} = \boxed{5488'15 \text{ s}}$$

$$\boxed{T_B} = \frac{2\pi R_B}{v_B} = \frac{2\pi\cdot 6'71\cdot10^6}{7716'41} = \boxed{5463'7 \text{ s}}$$

$\rightarrow \boxed{T_A - T_B} = 5488'15 - 5463'7 = \boxed{24'44 \text{ s}}$ Edo: $\frac{T_A}{T_B} = \frac{5488'15}{5463'7} = 1'004 \rightarrow \boxed{T_A = 1'004\, T_B}$

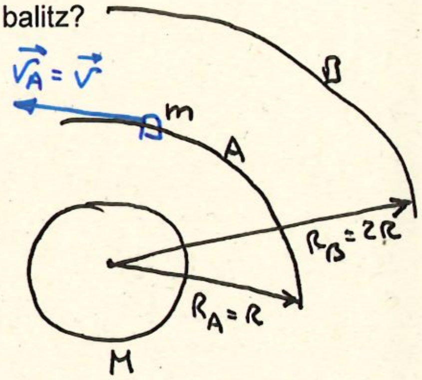
2010-7-A-P1. Planeta baten inguruan satelite bat ari da biraka *R* erradiodun orbita zirkular batean, *v* abiaduraz. Kalkulatu:

a) biraketa-periodoa.

b) planetaren masa.

c) Zenbat balioko luke biraketa-periodoak, orbitaren erradioa bikoiztuko balitz?

$R = 10.000\ km;\ v = 8\ km/s;\ G = 6{,}67\times10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$



a) Orbita zirkularra danez eta higidura periodikoa izanik, biraketa-periodoa kalkulatzeko abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuko doguz:

$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{T}\cdot R \rightarrow T = \frac{2\pi}{v}\cdot R$$

Holan A orbitan: $\boxed{T_A = \frac{2\pi}{v_A}\cdot R_A = \frac{2\cdot\pi\cdot 10^7}{8000} = 7853'98\,s}$

b) Abiadura orbitalaren formula kalkulatuko dogu; horretarako Grabitazio Unibertsalaren legetik abiatuz, eta indar zentripetua eta grabitatorioa berdinduz: $\vec{F_z} = \vec{F_G}$; Moduluak hartuz: $F_z = F_G \rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow$

$\rightarrow v^2 = G\frac{M}{R}$; Beraz: $\boxed{M = \frac{v^2\cdot R}{G} = \frac{v_A^2\cdot R_A}{G} = \frac{(8\cdot10^3)^2\cdot10^7}{6'67\cdot10^{-11}} = 9'595\cdot10^{24}\,Kg}$

c) Lehen atalean lortu dogun periodorako formula erradio bikoitzeko orbitaren kasurako: $T_B = \frac{2\pi}{v_B}\cdot R_B \rightarrow v_B = \frac{2\pi}{T_B}\cdot R_B$ (1)

Era berean bigarren atalean abiadura orbitalerako formulagaz:

$$v_B^2 = G\frac{M}{R_B} \quad (2)$$

(1) eta (2) adierazpideak landuz: $(v_B^2 = v_B^2) \rightarrow$

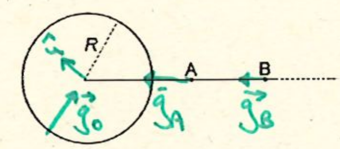
$$\rightarrow \frac{4\pi^2}{T_B^2}\cdot R_B^2 = G\frac{M}{R_B} \rightarrow R_B^3 = \frac{G\cdot M}{4\pi^2}\cdot T_B^2$$

Adierazpide hau Keplerren Hirugarren Legea bera da.

Bertatik T_B bakanduz:

$$\boxed{T_B = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\cdot M}\cdot R_B^3} = \sqrt{\frac{4\cdot\pi^2\cdot(2\cdot10^7)^3}{6'67\cdot10^{-11}\cdot 9'595\cdot10^{24}}} = 22.214'65\,s}$$

2010-6-A-P1. Grabitatearen intentsitateak *R* erradioko planeta baten gainazalean g_0 balio du. A puntuan, intentsitate horrek $g_A = g_0/2$ balio du; B puntuan, berriz, $g_B = g_0/4$ balio du. g-ren definizioa eta energiaren kontserbazioaren printzipioa erabiliz, kalkulatu:



a) A eta B puntuetatik planetaren zentrorainoko distantziak.
b) A puntuan objektu batek eraman behar duen abiadura minimoa B punturaino hel dadin.
c) A puntuan objektu batek eraman behar duen abiadura minimoa distantzia “infinituraino” hel dadin (hain distantzia handia, ezen bertan *g* delakoa ia-ia nulutzat har daitekeen). Azken kasu horretan, zer abiadura izango du B puntutik igarotzean?
$g_0 = 9,8\ m/s^2$, $R = 6,37\times10^6\ m$

Masteko, eta datuetan ez diranez emoten ez G eta bez planetaren masa, Eremu Grabitatorioaren Intentsitate bektorearen modulua erabiliz:

$\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\hat{u} \rightarrow g = \frac{GM}{R^2} \rightarrow GM = g\cdot R^2$; Holan planetaren gainazalean →

→ ($g = g_0$ eta $R = 6'37\cdot10^6$) → $\boxed{GM = g_0 R^2 = 9'8\cdot(6'37\cdot10^6)^2 = 3'977\cdot10^{14}\ \frac{m^3}{s^2}}$

a) Datu barri honegaz, A eta B puntuetan Eremu Grabitatorioaren Intentsitate bektorearen moduluak hartuz: $g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow R = \sqrt{\frac{GM}{g}} \rightarrow$

A → $\left\{\begin{matrix} R = R_A \\ g_A = g_0/2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{R_A = \sqrt{\frac{GM}{g_0/2}} = \sqrt{\frac{2GM}{g_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3'977\cdot10^{14}}{9'8}} = 9\cdot10^6\ m}$

B → $\left\{\begin{matrix} R = R_B \\ g_B = g_0/4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{R_B = \sqrt{\frac{GM}{g_0/4}} = \sqrt{\frac{4GM}{g_0}} = \sqrt{\frac{4\cdot 3'977\cdot10^{14}}{9'8}} = 1'27\cdot10^7\ m}$

b) Honetarako, Eremu Grabitatorioa kontserbakorra danez, Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuko dogu, jakinda v_A minimoa eskatzen dala, eta beraz v_B nulua da:

$E_{mA} = E_{mB}$; $E_{zA} + E_{pA} = E_{zB} + E_{pB}$; $\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{R_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{R_B} \rightarrow$

$\xrightarrow{v_B=0} \boxed{v_A = \sqrt{2\cdot\left(\frac{GM}{R_A} - \frac{GM}{R_B}\right)} = \sqrt{2\cdot3'977\cdot10^{14}\left(\frac{1}{9\cdot10^6} - \frac{1}{1'27\cdot10^7}\right)} = 5093'93\ m/s}$

c) Barriro Em-ren kontserbazioa aplikatuz eta abiadura minimoa eskatzen danez infinituko abiadura zero da (eta erradioa infinitu):

$E_{mA} = E_{m\infty}$; $E_{zA} + E_{pA} = E_{z\infty} + E_{p\infty}$; $\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{R_A} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GMm}{R_\infty} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2\frac{GM}{R_A}} = \sqrt{2\cdot\frac{3'977\cdot10^{14}}{9\cdot10^6}} = 9400'94\ m/s}$

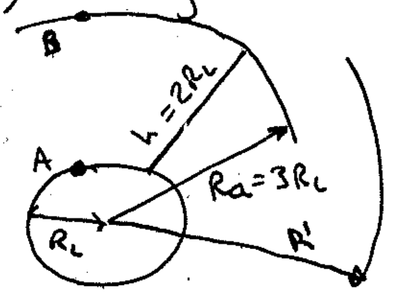
Abiadura horregaz B-tik pasatzean eukiko dauan abiadura kalkulatzeko barriro Em-ren kontserbazioa aplikatuz:

$E_{mB} = E_{mA}$; $E_{zB} + E_{pB} = E_{zA} + E_{pA}$; $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{R_B} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{R_A} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2\cdot\left[\frac{v_A^2}{2} + GM\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)\right]} = \sqrt{2\cdot\left[\frac{9400'94^2}{2} + 3'977\cdot10^{14}\left(\frac{1}{1'27\cdot10^7} - \frac{1}{9\cdot10^6}\right)\right]} = 7913'9\ \frac{m}{s}}$

2009-7-A1. *M* masako gorputz bat bertikalki jaurtikitzen da lurrazaletik V_0 goranzko abiaduraz, eta haren gainetik *h* altueraraino igoten da. Zenbatekoa da V_0, altuera hori Lurraren erradioaren bikoitza izan dadin? Demagun jaurtikitzen dugun objektuaren masa bikoizten dugula, eta jaurtikitze-abiadura ere bikoitza dela. Zein altueraraino igoko da honako honetan? Zein da energia potentzialen arrazoia kasu bietako punturik garaienetan? Zein da hasierako energia zinetikoen arrazoia kasu bietan?
$M=100\ kg$; $G = 6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$; $R_L = 6{,}37\cdot10^6\ m$; $M_L = 5{,}97\cdot10^{24}\ kg$

Buruketan bi partetan egingo dogu. Bakotxan goiko energia potentziala eta beheko energia zinetikoa kalkulatuko dogu, eta bigarren atal baten konparaketa egingo dogu.



a) V_0; $h=2R$

Eremu Grabitatorioa kontserbakorra danez, energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuko dogu.

$Em_A = Em_B$; $Ez_A + Ep_A = Ez_B + Ep_B$; $\frac{1}{2}mV_0^2 - G\frac{M_L\cdot m}{R_L} = \frac{1}{2}mV_B^2 - G\frac{M_L\cdot m}{3R_L}$

Goreneko punturaino heltzeko $V_B=0 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{V_0} = \sqrt{2\frac{GM_L}{R_L}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{2\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'97\cdot10^{24}}{6'37\cdot10^{6}}\cdot\frac{2}{3}} = \boxed{9129'55\ m/s}$

b) $V_A' = 2V_0 = 24055'6\ m/s$; $m'=2m \rightarrow h_B'$?

Arrazonamendu bardinagaz: $\frac{1}{2}m'V_A'^2 - G\frac{M_Lm'}{R_L} = \frac{1}{2}m'\cancel{V_B'}^{\,0} - G\frac{M_Lm'}{R'}$;

$$R' = \frac{-GM_L}{\frac{(2\cdot V_0)^2}{2} - G\frac{M_L}{R_L}} = \frac{-6'67\cdot10^{-11}\cdot5'97\cdot10^{24}}{\frac{(2\cdot9129'55)^2}{2} - \frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'97\cdot10^{24}}{6'37\cdot10^{6}}} = -38220101'2\ m.$$

Emaitza negatibo honek ez dauka zentzunik eta zirurenik ihes abiadura gainditu dala adierazten dau, eta beraz Eremu Grabitatoriotik kanpo dago.
Ziurtatuko dogu lurrazalean dagoan ihes abiadura kalkulatuz:

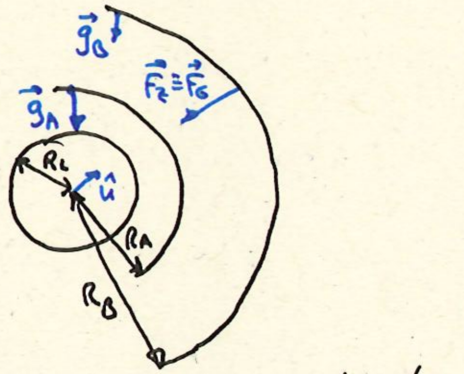
$v_i = \sqrt{2G\frac{M_L}{R_L}} = \sqrt{2\cdot6'67\cdot10^{-11}\frac{5'97\cdot10^{24}}{6'37\cdot10^{6}}} = 11181'37\ m/s$. Beraz eremutik kanpo gagoz.

c) Energien konparaketak.
Puntu gorenetan kalkulatzeak ez dauka zentzunik infinituan energia potentziala zero dalako.
Lurrazalean:

$$\left.\begin{array}{l} V_0 \rightarrow E_z = \frac{1}{2}mV_0^2 \\ 2V_0 \rightarrow E_z' = \frac{1}{2}m(2V_0)^2 \end{array}\right\} \frac{E_z}{E_z'} = \frac{\frac{1}{2}mV_0^2}{\frac{1}{2}m4V_0^2} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{E_z' = 4E_z}$$

2009-6-A1. Masa berdineko bi satelitek orbita zirkularrak osatzen dituzte Lurraren inguruan, R_A erradioduna lehenengoa, eta R_B erradioduna bigarrena. R_B delakoa R_A-ren bikoitza bada, kalkulatu satelite bien hurrengo magnitudeen arteko arrazoiak: a) biraketa-periodoena; b) abiadura linealena; c) abiadura angeluarrena; d) energia osoena, eta e) grabitatearen azelerazioena (g) R_A-n eta R_B-n.

R_A=10.000 km; $G = 6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$; $R_L = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_L = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg



a) Abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz: $v = \omega\cdot R$; $v = \frac{2\pi}{T}\cdot R \rightarrow$

$\rightarrow T = \frac{2\pi}{v}\cdot R$

Holan izanik abiadura orbitala kalkulatu beha dogoz, beraz b) atala hementxe garatuko dogu.

b) Abiadura orbitala kalkulatzeko indar grabitatorioa eta indar zentripetua berdindu beharko doguz. Holan, eta Grabitazio Unibertsalaren Legetik abiatuta: $\vec{F}_z \equiv \vec{F}_G$ → moduluak: $F_z = F_G \rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$

$A \rightarrow R_A = 10^7 m \rightarrow \boxed{v_A} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{5'97\cdot10^{24}}{10^7}} = 6310'3\ m/s$

$B \rightarrow R_B = 2\cdot10^7 m \rightarrow \boxed{v_B} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{5'97\cdot10^{24}}{2\cdot10^7}} = 4462'1\ m/s$

$\boxed{v_A = 1'41\, v_B}$

a) Periodoetara itzuliz:

$A \rightarrow T_A = \frac{2\pi}{6310'3}\cdot10^7 = 9957'03 s$

$B \rightarrow T_B = \frac{2\pi}{4462'1}\cdot2\cdot10^7 = 28162'46 s$

$\boxed{T_A = 0'354\, T_B}$

c) $A \rightarrow \omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$

$B \rightarrow \omega_B = \frac{2\pi}{T_B}$

$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{1/T_A}{1/T_B} \rightarrow \boxed{\omega_A = \frac{1/9957'03}{1/28162'46}\omega_B = 2'83\, \omega_B}$

d) Energia mekaniko osoa, orbitan dagoenean, energia mekanikoaren erdia da, beraz: $E_m = \frac{1}{2}E_p = -G\frac{Mm}{2R}$

$R_A \rightarrow E_{mA} = -\frac{GMm}{2R_A}$

$R_B = 2R_A \rightarrow E_{mB} = -\frac{GMm}{2\cdot2R_A}$

$\frac{E_{mA}}{E_{mB}} = \frac{-G\frac{Mm}{2R_A}}{-G\frac{Mm}{4R_A}} \rightarrow \boxed{E_{mA} = 2E_{mB}}$

e) Eremu Grabitatorioaren intentsitate bektorea kalkulatuz:

$\vec{g}_A = -G\frac{M}{R_A^2}\hat{u}$

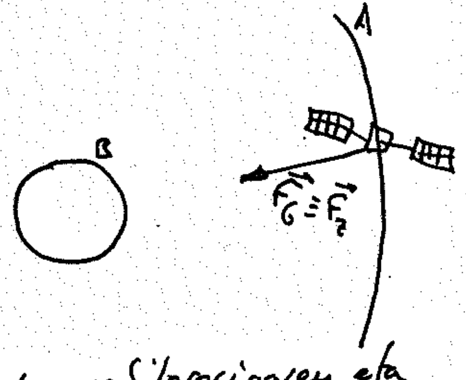
$\vec{g}_B = -G\frac{M}{(2R_A)^2}\hat{u}$

$\frac{\vec{g}_A}{\vec{g}_B} = \frac{-G\frac{M}{R_A^2}\hat{u}}{-G\frac{M}{4R_A^2}\hat{u}} \rightarrow \boxed{\vec{g}_A = 4\vec{g}_B}$

2008-7-A1. Lurraren inguruko satelite bat, 500 kg-koa, orbita zirkular sinkronikoak (edo geoegonkorrean*) higitzen ari da. Bat-batean, gelditu egiten da bere orbitan. Kalkulatu: a) satelitea geldiarazteko zer energia behar den, b) lurrazalera heltzean, zer abiadura izango duen.

**geoegonkorra: orbita ekuatoriala da, non sateliteak Lurraren abiadura angeluar berbera baitu, eta horregaitik lurrazaleko puntu berberaren gainean dagoela emoten du beti.*

$G = 6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$; $R_L = 6.370$ km; $M_L = 5{,}99\cdot10^{24}$ kg



a) Satelitea geldiarazteko egin beharreko lana bere energia zinetikoa kentzekoa da.
Horretarako orbita geoegonkorraren erradioa kalkulatuko dogu.
Grabitazio Unibertsalaren Legetik abiatuta eta indar grabitazioaren eta zentripetuaren moduluak berdinduz: $F_z = F_G \to m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_L m}{R^2} \to$

$$\to v = \sqrt{G\frac{M_L}{R}} \quad (1)$$

Bestaldetik abiadura angeluarragaz erlazionatuz:

$$v = \omega\cdot R = \frac{2\pi}{T}\cdot R \quad (2)$$

(1) eta (2) berdinduz $\to \frac{2\pi}{T}\cdot R = \sqrt{G\frac{M_L}{R}} \to \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R^2 = G\frac{M_L}{R} \to$

$$\to \boxed{R_A} = \sqrt[3]{\frac{GM_L}{4\pi^2}T^2} = \sqrt[3]{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot5'99\cdot10^{24}}{4\pi^2}\cdot86400^2} = \boxed{4'23\cdot10^7 m}$$

$$T = 24h\cdot\frac{60 min}{1h}\cdot\frac{60 s}{1 min} = 86400 s$$

Beraz abiadura orbitala A puntuan: $\boxed{v_A = \sqrt{G\frac{M_L}{R_A}} = \sqrt{6'67\cdot10^{-11}\frac{5'99\cdot10^{24}}{4'23\cdot10^7}} = 3074'3 m/s}$

Holan, daukan energia zinetikoa eta beraz hori bertan behera izteko egin beharreko lana: $\boxed{W = E_{ZA} = \frac{1}{2}m v_A^2 = \frac{1}{2}500\cdot3074'3^2 = 2'36\cdot10^9 J}$

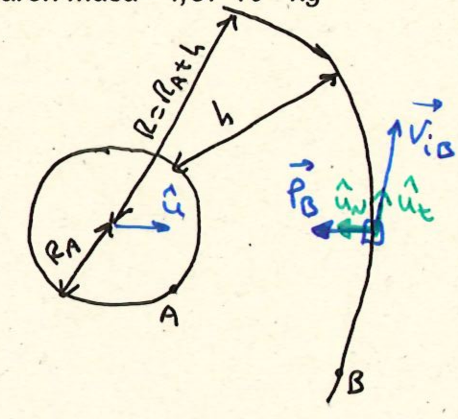
b) Lurrazalera heltzean edukiko daban abiadura (v_B) kalkulatzeko, eremua kontserbakorra izanik, Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuz kalkulatzen da (jakinda satelitea gelditu egin dala orbitan, $v_A = 0$): $E_{mB} = E_{mA} \to E_{ZB} + E_{pB} = E_{ZA} + E_{pA} \to$

$$\to \frac{1}{2}m v_B^2 - G\frac{M_L m}{R_B} = \frac{1}{2}m \underbrace{v_A^2}_{0} - G\frac{M_L m}{R_A} \to v_B = \sqrt{2GM_L\left(\frac{1}{R_B}-\frac{1}{R_A}\right)} \to$$

$$\to \boxed{v_B = \sqrt{2\cdot6'67\cdot10^{-11}\cdot5'99\cdot10^{24}\left(\frac{1}{6'37\cdot10^6}-\frac{1}{4'23\cdot10^7}\right)} = 10322'4 m/s}$$

2008-6-A1. Kalkulatu Artizarraren azalean kokaturiko 10 kg-ko objektu batek zer altuera lor dezakeen gehienez, hasieran 5 km/s-ko goranzko abiadura ematen baldin bazaio. Altuera horretan, a) zenbat balio du bere energia potentzialak?, b) zer pisu izango du?, eta c) zer ihes-abiadura izango du altuera horretan?

$G = 6{,}67\times10^{-11}\ N\cdot m^2kg^{-2}$; Artizarraren erradioa= $6{,}52\cdot10^6 m$, Artizarraren masa= $4{,}87\cdot10^{24}$ kg



Lortu daiken altuera maximoa kalkulatzeko, Eremu Grabitatorioa kontserbakorra danez, Energia Mekanikoaren Kontserbasioaren Printzipioa aplikatuko dogu:

$$E_{mB} = E_{mA} \to E_{zB} + E_{pB} = E_{zA} + E_{pA} \to$$

$\to$ h maximoan $v_B = 0$, beraz $E_{zB} = 0 \to$

$$\to -G\frac{M_A\cdot m}{R} = \frac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{M_A\cdot m}{R_A} \to -G\frac{M_A}{R_A+h} = \frac{1}{2}v_A^2 - G\frac{M_A}{R_A} \to$$

$$\to \boxed{h = \frac{-GM_A}{\frac{1}{2}v_A^2 - G\frac{M_A}{R_A}} - R_A = \frac{-6'67\cdot10^{-11}\cdot4'87\cdot10^{24}}{\frac{1}{2}5000^2 - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{4'87\cdot10^{24}}{6'52\cdot10^6}} - 6'52\cdot10^6 = 2'18\cdot10^6 m}$$

a) Altuera horretako Ep: $\boxed{E_{pB} = -G\frac{M_A\cdot m}{R_B} = -6'67\cdot10^{-11}\frac{4'87\cdot10^{24}\cdot10}{6'52\cdot10^6+2'18\cdot10^6} = -3'73\cdot10^8 J}$

b) Pisua erakarpen grabitatorioa da, beraz Grabitazio Unibertsalaren Legearen formulatik: $\boxed{\vec{P}_B = \vec{F} = -G\frac{M_A\cdot m}{R_B^2}\hat{u} = -6'67\cdot10^{-11}\frac{4'87\cdot10^{24}\cdot10}{(6'52\cdot10^6+2'18\cdot10^6)^2}\hat{u} = -42'91\hat{u}\ N}$

c) Ihes abiadura erradioarekiko perpendikularki eta infinituraino heltzeko abiadura da. Eremuaren kontserbakortasunean oinarrituta ihes abiadura kalkulatuko dogu:

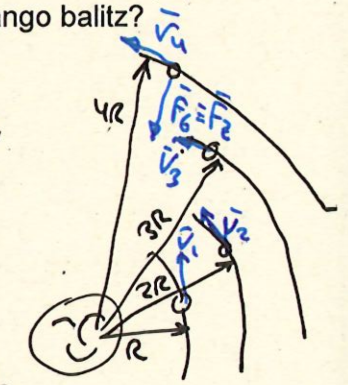
$$E_{mB} = E_{m\infty} \to E_{zB} + E_{pB} = E_{z\infty} + E_{p\infty} \to$$

$$\to \frac{1}{2} m v_{iB}^2 - G\frac{M_A m}{R_A+h} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 - G\frac{M_A\cdot m}{\infty} \quad \underline{v_\infty = 0}$$

$$\to v_{iB} = \sqrt{2G\frac{M_A}{R_A+h}} = \sqrt{2\cdot6'67\cdot10^{-11}\frac{4'87\cdot10^{24}}{6'52\cdot10^6+2'18\cdot10^6}} = 8641'37\ m/s$$

Era bektorialean: $\boxed{\vec{v}_{iB} = 8641'37\ \hat{u}_t\ m/s}$

2007-7-A1. Lehenengo hurbilketa batean, Eguzki-sistemako lehenengo lau planetek Eguzkiraino dituzten distantzien arteko erlazioak oso errazak dira. Orbita hauek zirkulartzat hartuz, eta R bada Merkurioren orbitaren erradioa, beste hiru planeten erradioak hurrengoak dira: Artizarrarena, 2R; Lurrarena, 3R, eta Marterena, 4R. Planeten higidurarako Keplerren hirugarren legeak hauxe dio: Eguzkiaren inguruko orbitan dabilen planeta baten periodoaren berbidura eta orbita horren erradioaren kuboa elkarren proportzionalak dira, $T^2 = C\cdot r^3$. Lurraren periodoa ezagutzen badugu, kalkulatu: a) beste planeten periodoak (egun lurtarretan), b) proportzionaltasun konstantea, C, eta azkenez, c) nola aldatuko lirateke periodo hauek Eguzkiaren masa 4 aldiz handiagoa izango balitz?



Hasteko Keplerren 3. Legea landuko dogu.
Alde batetik abiadura orbitala kalkulatuko dogu, horretarako indar grabitatorioa eta zentripetua bardinduko doguz: $\vec{F}_Z = \vec{F}_G$ → moduluak berdinduz:

$$F_Z = F_G \rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_E m}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_E}{R}} \quad (1)$$

Beste aldetik abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz:

$$v = \omega\cdot R \rightarrow v = \frac{2\pi}{T}\cdot R \quad (2)$$

(1) eta (2) berdinduz: $\frac{2\pi R}{T} = \sqrt{G\frac{M_E}{R}} \rightarrow \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = G\frac{M_E}{R} \rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{M_E\cdot G}\cdot R^3}$

a) Lurraren kasuan periodoa = $\boxed{T_3} = 365\,\text{egun}\cdot\frac{24\,h}{1\,\text{egun}}\cdot\frac{3600\,s}{1\,h} = \boxed{3'154\cdot 10^7\,s}$

Orain bikoteka:

Lurra → $T_3^2 = C\cdot(3\cdot R)^3$
Marte → $T_4^2 = C\cdot(4\cdot R)^3$
$\rightarrow \div\ \frac{T_3^2}{T_4^2} = \frac{3^3}{4^3} \rightarrow \boxed{T_4 = \sqrt{\frac{4^3}{3^3}T_3^2} = 4'85\cdot 10^7\,s}$

Lurra → $T_3^2 = C\cdot(3R)^3$
Artizarra → $T_2^2 = C\cdot(2R)^3$
$\rightarrow \div\ \boxed{T_2} = \sqrt{\frac{2^3\cdot T_3^2}{3^3}} = \boxed{1'717\cdot 10^7\,s}$

Lurra → $T_3^2 = C(3R)^3$
Merkurio → $T_1^2 = C R^3$
$\rightarrow \div\ \boxed{T_1} = \sqrt{\frac{T_3^2}{3^3}} = \boxed{0'607\cdot 10^7\,s}$

b) Buruketaren hasieran eginda: $\boxed{C = \frac{4\pi^2}{M_E\cdot G}}$

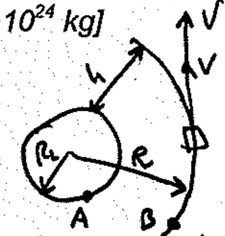
M_E = Eguzkiaren masa
G = Grabitazio Unibertsalaren Konstantea.

c) Hasieran lortu dogun adierazpidea erabiliz:
$T^2 = \frac{4\pi^2}{M_E\cdot G}R^3$; planeten orbiten erradioak mantenduz, guztien eskiko lerken aldaketa bardina izango litzateke. T hasierako periodoa eta T' periodo barria izanik:

$$\left.\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2}{M_E\cdot G}R^3 \\ T'^2 &= \frac{4\pi^2}{4M_E G}R^3 \end{aligned}\right\} \div\ \frac{T^2}{T'^2} = 4 \rightarrow T'^2 = \frac{1}{4}T^2 \rightarrow \boxed{T' = T/2}$$

2007-6-A1. Nazioarteko Espazio-Estazioa (ISS) Lurraren inguruan biratzen da zirkulartzat hartuko dugun orbita batean, lurrazaletik 380 km-ra. Kalkulatu: a) Estazioaren abiadura lineala eta Lurrari bira oso bat emateko hartuko duen denbora-tartea (periodoa), b) lurrazaleko puntu batetik hasiz *, 1 kg-ko masa orbite horretara bidaltzeko behar dugun energia minimoa, eta c) orbita horretatik Lurraren erakarpenetik ihes egiteko behar den abiadura. *[G = 6,67·10⁻¹¹N·m²/kg²; R_L = 6.370 km; M_L = 5,99·10²⁴ kg]*

**Ez hartu kontuan Lurrak bere ardatzarekiko duen biraketa-abiadura.*



a) Eskatzen deuskuena abiadura orbitala da. Hori kalkulatzeko, eta Grabitazio Unibertsalaren legetik abiatuta, indar grabitatorioaren eta indar zentripetuaren moduluak berdintzen doguz: $F_g = F_c$ →

$R = R_L + h = (6370+380)\cdot 10^3 = 6'75\cdot 10^6\,m$

$$\rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\frac{M_L}{R}}} = \sqrt{6'67\cdot 10^{-11}\,\frac{5'99\cdot 10^{24}}{6'75\cdot 10^6}} = \boxed{7693'51\,m/s}$$

Abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz:

$$v = \omega\cdot R;\quad v = \frac{2\pi}{T}\cdot R \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi\cdot R}{v}} = \frac{2\pi\cdot 6'75\cdot 10^6}{7693'51} = \boxed{5512'6\,s}$$

b) Energia minimoa altueraraino eroatekoa da, goiko abiadura zero izanik. Eremu Grabitatorioa kontserbakorra danez: $E_{mA} = E_{mB}$ →

$$\rightarrow E_{zA} + E_{pA} = \cancel{E_{zB}}^{\,0} + E_{pB} \rightarrow E_{zA} = E_{pB} - E_{pA} = -G\frac{M_L m}{R} + G\frac{M_L m}{R_L} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Eman beharreko energia} = E_{zA} = GM_L m\left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R}\right)} =$$

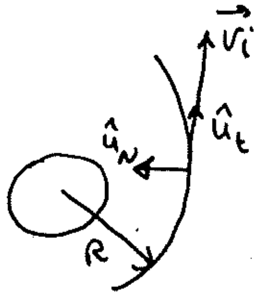
$$= 6'67\cdot 10^{-11}\cdot 5'99\cdot 10^{24}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{6'37\cdot 10^6} - \frac{1}{6'75\cdot 10^6}\right) = \boxed{3'5\cdot 10^6\,J}$$

c) Ihes abiadura Eremu Grabitatoriotik alde egiteko beharrezkoa dana da. Holan gorputza infinituraino bidali behar da. Infinituan $R=\infty$ da, eta zero abiaduragaz heltzen da haraino. Holan bada Energia Mekanikoaren Kontserbazioaren Printzipioa aplikatuz:

$$E_{mB} = E_{m\infty};\quad E_{zB} + E_{pB} = E_{z\infty} + E_{p\infty};$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{M_L m}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{M_L\cdot m}{\infty} \rightarrow v_i = \sqrt{2G\frac{M_L}{R}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v_i} = \sqrt{2\cdot 6'67\cdot 10^{-11}\,\frac{5'99\cdot 10^{24}}{6'75\cdot 10^6}} = \boxed{10\,880'26\,m/s}$$

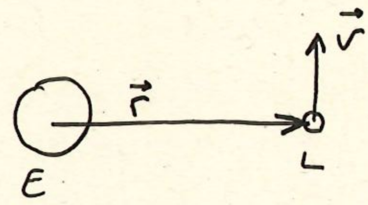


Era bektorialean: $\boxed{\vec{v_i} = 10880'26\,\hat{u}_t\,m/s}$

urte

2006-7-A1. Lurra biraka ari da Eguzkiaren inguruan $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m-ko erradioko orbita zirkular batean, eta bira oso bat ematen du ordubete baikoitzean. Kalkulatu: a) Lurraren translazio-abiadura, b) Lurraren momentu angeluarra, eta c)Eguzkiaren masa.
$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N· m^2 kg^{-2}; *Lurraren masa = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg*

a) Lurraren translazio abiadura bere orbitan daukana da.



Kasu honetan periodoa eta erradioa ezagunak direnez, abiadura lineala eta angeluarra erlazionatuz:

$v = \omega \cdot r$; $v = \frac{2\pi}{T} \cdot r$

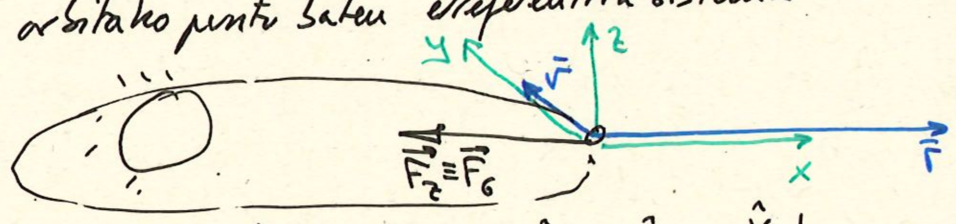
$r = 1'5 \cdot 10^{11}$ m

$T = 1 \text{urte} \cdot \frac{365 \text{ egun}}{1 \text{urte}} \cdot \frac{24h}{1 \text{egun}} \cdot \frac{3600 s}{1h} = 3'1536 \cdot 10^7 s$

$$\boxed{v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1'5 \cdot 10^{11}}{3'1536 \cdot 10^7} = 29885'77 \, m/s}$$

b) Momentu angeluarra: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$

Grafikoki, eta orbitako puntu baten erreferentzia sistema finkatuta:



$$\boxed{\vec{L}} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 5'98 \cdot 10^{24} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1'5 \cdot 10^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 29885'77 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5'98 \cdot 10^{24} \cdot 1'5 \cdot 10^{11} \cdot 29885'77 \, \hat{k} = \boxed{2'68 \cdot 10^{40} \, \hat{k} \; Kg \frac{m^2}{s}}$$

c) Orain indar zentripetua eta grabitatorioa berdinduz, eta Grabitazio Unibertsalaren legetik abiatuta (moduluak berdinduz):

$F_z = F_G \rightarrow m \frac{v^2}{R} = G \frac{M_E m}{R^2} \rightarrow M_E = \frac{R \cdot v^2}{G}$

Lehen ataletik v ezaguna da, beraz:

$$\boxed{M_E} = \frac{1'5 \cdot 10^{11} \cdot 29885'77^2}{6'67 \cdot 10^{-11}} = \boxed{2 \cdot 10^{30} Kg}$$